目　　录

第一部分　几 何 选 讲

（纽约大学，1946，记录者 Peter Lax）

第一章　欧拉示性数及有关问题 …… 2
1．欧拉定理 …… 2
2．第一证明（勒让德尔） …… 2
3．欧拉定理的系理 …… 3
4．欧拉定理第二证明（施泰因内尔） …… 5
5．关于多面形的一般概念 …… 7
6．欧拉定理第三证明 …… 8
7．更高亏格的曲面 …… 8
8．对于黎曼面的应用 …… 9
9．欧拉示性数在矢场论中的作用 …… 10
10．欧拉定理的纯组合证明（柯西） …… 14
11．关于一维复形的一般概念 …… 16
12．柯西的一个定理 …… 17
13．德瓜公式 …… 19
14．n 维单形定义 …… 21
15．n 维凸多面形的欧拉示性数 …… 23
16．n 维球单形 …… 27
第二章　初等微分几何选讲 …… 30
1．曲率 …… 30
2．施瓦尔茨的一个定理 …… 33
3．关于圆的一项最小性质 …… 34
4．四顶定理 …… 35
5．切线不连续转动的曲线 …… 36
6．四顶定理的黑尔格洛茨证明 …… 40
7．简单闭曲线的总曲率 …… 42

8. 一般闭曲线的总曲率 ………… 43
第三章 等周不等式及有关不等式………… 47
1. 等周不等式的施米特证明 ………… 47
2. 到 n 维的推广 ………… 49
3. 等周不等式的胡尔维茨证明 ………… 51
4. 一类更一般的不等式 ………… 55
5. 三维等周不等式证明的完成 ………… 57
第四章 初等的面积和体积概念………… 60
1. 矩形面积和矩体体积 ………… 60
2. 相抵多边形(多面体) ………… 62
3. 相抵多边形的分解 ………… 65
4. 多面体对于正则重分的相抵类 ………… 66
5. 多面体的相抵类 ………… 69
6. 相抵棱柱 ………… 73
问题………… 75

第二部分 整体微分几何

(斯坦福大学,1956,记录者 J. W. Gray)

引言………… 80
第一章 曲面的局部微分几何(纲要)………… 81
0. 记号 ………… 81
1. 初等概念 ………… 82
2. 第一基本齐式 ………… 83
3. 短程线 ………… 84
4. 平移 ………… 86
5. 黎曼空间 ………… 89
6. 二维黎曼几何中的曲率 ………… 89
7. E^3 里曲面的高斯曲率 ………… 91
8. 第二基本齐式 ………… 91
9. 两个基本齐式的关系 ………… 95
10. 几点补充………… 96
第二章 关于微分几何中闭曲面的一些一般事实………… 98
1. E^3 里的简单闭曲面 ………… 98

2. 抽象闭曲面 …………………………………………………………………… 100
3. E^3 里的一般闭曲面 ……………………………………………………… 102
4. 黎曼几何 ………………………………………………………………………… 103
第三章 具有黎曼度量的闭曲面的总曲率和关于线素场奇点的庞加莱定理…………………………………………………… 106
1. 曲线族的奇点 ………………………………………………………………… 106
2. 主要定理 ………………………………………………………………………… 111
3. 球面映射的度数 …………………………………………………………… 115
4. 到高维的推广 ………………………………………………………………… 117
第四章 卵形面的阿达马特征………………………………………………… 119
1. E^3 里的卵形面 ……………………………………………………………… 119
2. 到高维的推广 ………………………………………………………………… 122
第五章 具常数高斯曲率的闭曲面(希尔伯特法)——推广及问题——关于魏因加尔吞曲面的一般事实………… 124
1. 球面的一个特征 …………………………………………………………… 124
2. 魏因加尔吞曲面 …………………………………………………………… 128
3. 等周问题和具常数中曲率的曲面 ……………………………… 133
第六章 具常数中曲率的一般零亏闭曲面——推广………… 138
1. 正方参数 ………………………………………………………………………… 138
2. 主要定理 ………………………………………………………………………… 141
3. 特殊魏因加尔吞曲面 …………………………………………………… 143
第七章 具常数中曲率的简单闭曲面(亏格任意)——推广… 149
1. 引言 …………………………………………………………………………………… 149
2. 球面的另一个特征 ………………………………………………………… 149
3. 简单闭曲面的一项"对称"性质 ………………………………………… 150
4. 绝对椭圆的偏微分方程 ………………………………………………… 157
5. 主要定理 ………………………………………………………………………… 161
6. 推广——简单闭魏因加尔吞曲面 ……………………………… 162
第八章 关于卵形面的全等定理………………………………………… 164
1. 等距曲面的第二基本齐式 ………………………………………… 164
2. 曲线网及其奇点 …………………………………………………………… 167
3. 主要定理 ………………………………………………………………………… 169

第九章　具负常数高斯曲率曲面的奇点…………………… 175
1. 奇点 ………………………………………………………… 175
2. 切比雪夫网 ………………………………………………… 177
3. 主要定理 …………………………………………………… 180
4. 其他细节及推广 …………………………………………… 183
人名索引…………………………………………………………… 185
内容索引…………………………………………………………… 186

第一部分 几 何 选 讲

纽约大学，1946

记录者 Peter Lax

第　一　章

欧拉示性数及有关问题

1. 欧拉定理

我们要讨论的第一个问题是著名的欧拉（Euler）定理，即关于一个凸多面形的面数，棱数和顶数之间的关系.

定义 一个凸二维(胞)腔是一个凸集，它的边界含有有限多条直线段(棱)，这些线段相会于点(顶点). 一个凸三维(胞)腔是一个凸集，它的边界是有限多个二维腔的集合. 一个三维(胞)腔的(边界)顶点数用 e 表示;棱数用 k 表示;二维腔数用 f 表示.

欧拉定理: 关于三维凸腔,下面的关系成立:

$$e-k+f=2. \tag{1.1}$$

我们将给出这定理的几种证明.

2. 第一证明(勒让德尔（Legendre))

设 P 是所给三维腔的边界,它是一个凸多面形. 从 P 内一点,把 P 投影到以该点为中心的幺球面上. 根据凸集的一般理论，这是可能的. 这样,就得到球面上由球面凸多边形构成的一个网络.

关于球面多边形的一个定理 幺球面上一个球面凸多边形的内角和是 $(n-2)\pi+A$,其中 n 是多边形的边数, A 是它的面数.

这个定理可以用归纳法证明: 当 $n=3$ 时，它就是人们熟知的关于球面三角形的一个定理. 为了从 n 推到 $n+1$，只须用一条对角线把多边形分成一个三角形和一个 $n-1$ 边形；注意由于原多边形是凸的,这条对角线完全位于它的内部.

对于非凸多边形,这个定理仍然成立,但我们不去证它.

我们回到上面所得到的、由球面凸多边形构成的网络. 对于每一个多边形,我们写下方程

$$\sum\alpha_i = n\pi - 2\pi + A,$$

其中 α_i 是多边形的角．对一切多边形 P_i 取和，则因为每个顶点处的诸角和是 2π，

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} = 2\pi e.$$

又因为每条棱为两个多边形所共有，在取和时，每条棱计算两次，故

$$\sum\pi n_j = 2\pi k,$$

其中 n_j 是多边形 P_j 的边(棱)数．再次，对于 j 取和，得

$$\sum_{j=1}^{f} 2\pi = 2\pi f.$$

最后，由于球面上每一点恰好被覆盖一次，而幺球面的面积是 4π，

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} = \sum_{j} n_j\pi - \sum_{i} 2\pi + \sum_{j} A_j,$$

即

$$2\pi e = 2\pi k - 2\pi f + 4\pi.$$

以 2π 除上式，就得欧拉公式 (1.1)．

3. 欧拉定理的系理

设 f_n 为多面形上 n 边二维腔的个数；显然，

$$f = \sum_{n\geqslant 3} f_n. \tag{3.1}$$

由于每边属于两个多边形，所以

$$2k = \sum_{n\geqslant 3} nf_n, \tag{3.2}$$

其中右边是所有多边形的边数的和．

设 e_m 为多面形上有 m 条棱相会的顶点的个数；显然，

$$e = \sum_{m\geqslant 3} e_m. \tag{3.3}$$

由于每条棱有两个顶点，

$$2k = \sum_{m\geqslant 3} me_m, \tag{3.4}$$

右边是汇聚于所有顶点的棱数的总和。

先把 (3.1),(3.2),(3.3) 代入 (1.1), 再把 (3.1), (3.3), (3.4) 代入,就得

$$\sum 2e_m + \sum 2f_n - 4 = \sum nf_n, \tag{1.1'}$$

$$\sum 2e_m + \sum 2f_n - 4 = \sum me_m. \tag{1.1''}$$

相加,得

$$\sum 4e_m + \sum 4f_n - 8 = \sum nf_n + \sum me_m,$$

或者

$$0 = 8 + \sum_{m\geq 3}(m-4)e_m + \sum_{n\geq 3}(n-4)f_n.$$

把其中的负值项移于左方,就得

$$e_3 + f_3 = 8 + \sum_{m\geq 5}(m-4)e_m + \sum_{n\geq 5}(n-4)f_n.$$

由于右边诸项都是非负的,可知

$$e_3 + f_3 \geqslant 8. \tag{3.5}$$

特殊地,(3.5) 表明:

a) **每一个凸多面形或者有三角形的面,或者有三棱形的顶点,也可能兼有二者.**

以 2 乘 (1.1'),再与 (1.1'') 相加,得

$$\sum 6e_m + \sum 6f_n - 12 = \sum 2nf_n + \sum me_m,$$

或者

$$-12 = \sum_{n\geq 3}(2n-6)f_n + \sum_{m\geq 3}(m-6)e_m.$$

移项,使方程两边都只有正项,就得

$$3e_3 + 2e_4 + e_5 = 12 + \sum_{n\geq 4}(2n-6)f_n + \sum_{m\geq 7}(m-6)e_m.$$

由于右边诸项都是非负的,

$$3e_3 + 2e_4 + e_5 \geqslant 12.$$

与此类似,可得

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 \geqslant 12.$$

由最后两个不等式,可知

b) 每一个凸多面形必有含三棱,四棱或五棱的顶点.

c) 每一个凸多面形必有三角形,四角形或五角形的面.

正多面形 一个正多面形的各面有相同的边数 n,它的各顶点有相同的棱数 m. 于是

$$e = e_m,\ f = f_n.$$

但已知 m, n,由

$$2k = me = nf \text{ 和 } e - k + f = 2,$$

可以求得

$$e = \frac{4n}{2(m+n) - mn},$$

$$k = \frac{2mn}{2(m+n) - mn},$$

$$f = \frac{4m}{2(m+n) - mn}.$$

故当 $m = 3$ 时,分母都是 $6-n$,因此 $3 \leqslant n \leqslant 5$. 同样,当 $n = 3$ 时,$3 \leqslant m \leqslant 5$. 我们把一切可能性列成下表.

n	m	e	f	k	
3	3	4	4	6	四面形
3	4	6	8	12	八面形
3	5	12	20	30	二十面形
4	3	8	6	12	六面形(正立方形)
5	3	20	12	30	十二面形

这样就证明了只有通常的五种正多面形.

4. 欧拉定理第二证明(施泰因内尔 (Steiner))

在平面上,设 C 为 N 边二维腔,并把它重分为二维腔 C_i. 设重分后 C 的顶点数、棱数、二维腔数依次用 e, k, f 表示;而不在它边界上的顶点(叫做内顶点)数,棱(叫做内棱)数,二维腔数依次用

e', k', f' 表示,则 $e'=e-N$, $k'=k-N$, $f'=f$. 令 $\chi(C)=e-k+f$, $\chi'(C)=e'-k'+f'$. 我们将证明 $\chi(C)=\chi'(C)=1$.

对于每个具有 n_i 边的二维腔 C_i 设 α_j 为其诸角，就有我们熟知的公式

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-n_i\pi+2\pi=0. \tag{4.1}$$

我们对于一切 C_i 取和,首先有

$$\sum_{i,j}\alpha_{ji}=2\pi e'+\sum_{C}\alpha;$$

因为在每个内点,诸角和是 2π. 这里 $\sum\limits_{C}\alpha$ 则表示 C 的诸角之和.

其次,

$$\sum_{i}n_i\pi=2\pi k'+\pi N;$$

因为每条内棱是两个内二维腔的边，其中 N 是 C 的边数. 所以, $\sum n_i=k'+N$. 再次,由于 $f=f'$,

$$\sum 2\pi=2\pi f'$$

由最后三式,得

$$2\pi e'-2\pi k'+2\pi f'+\sum_{C}\alpha-\pi N=0. \tag{4.2}$$

由于 (4.1) 对于 C 也适用,

$$\sum_{C}\alpha-\pi N+2\pi=0.$$

把 (4.2) 和这式相减,再除以 2π,得

$$e'-k'+f'=1. \tag{4.3}$$

但 $e=e'+N$, $k=k'+N$, $f=f'$;代入 (4.3),就得

$$e-k+f=1. \tag{4.3'}$$

其次，考虑一条直线段的重分，e, k, e', k' 的意义如前. 由于重分后的线段数总比内顶点数多 1,

$$e'-k'=-1. \tag{4.4}$$

与此类似，

$$e-k=1. \tag{4.4'}$$

(4.3′) 和 (4.4′) 依次可以看作关于二维和一维腔的欧拉定理.

5. 关于多面形的一般概念

一个多面形由有限多个二维腔所构成，这些二维腔中，每两个具有以下三种关系之一：

a) 它们没有公共点；

b) 它们有一个公共顶点；

c) 它们有一条公共棱.

作为定义，一个多面形 P 的示性数 $\chi(P)$ 是

$$\chi(P)=e-k+f.$$

一个多面形的重分 把一个多面形重分，就是用顶点和棱构成的网络把它的二维腔分成新的二维腔的集合，而这些新的二维腔仍然构成多面形；若原来的两个二维腔有一条公共棱，则棱上每一点或者同时是那两个二维腔的网络的新顶点或者不是那两个网络的新顶点.

定理 设 P_2 是多面形 P_1 的细分，则

$$\chi(P_1)=\chi(P_2). \tag{5.1}$$

证明 设在 P_1 的一条棱上，有一个新顶点，则根据 (4.4)，这条开棱(即不含端点的棱)对于 $\chi(P_2)$ 提供的数值是-1，而它对于$\chi(P_1)$ 提供的数值本来也是 $0-1+0=-1$.

设 P_1 的一个二维腔分成两个，则根据 (4.3)，新的顶点、棱和二维腔对 $\chi(P_2)$ 所提供的数值是$+1$，而它们对 $\chi(P_1)$ 所起的作用本来也是$+1$.

由于重分所引起的变化只有这两种，可见示性数不变.

示性数经过重分不变这个事实，是曲面分类的最重要根据之一.

6. 欧拉定理第三证明

已经证明了示性数经过重分不变；这个事实构成欧拉定理第三证明的基础。

已给两个三维凸腔，从它们的一个公共内点[1]把它们投影到一个球面上，就得到球面上两个网络 P 和 Q。设 S 为"合并" P, Q 所得到的网络：S 的二维腔是 P, Q 的二维腔的非空交集；S 的棱是 P, Q 的棱的交点对后者的重分，S 的顶点是 P, Q 的顶点加上 P, Q 的棱的交点. 于是 S 是 P 的重分，也是 Q 的重分[2]，根据上节结果，$\chi(S)=\chi(P)$, $\chi(S)=\chi(Q)$. 故

$$\chi(P)=\chi(Q).$$

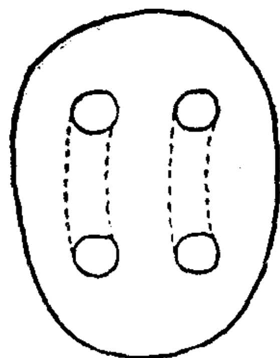
因此，一切凸多面形有相同的示性数 χ. 特殊地，一个四面形的示性数是 $4-6+4=2$，因而一切三维凸腔的示性数

$$\chi(P)=2, \text{ 或 } e-k+f=2.$$

这样就证明了欧拉定理.

7. 更高亏格的曲面

上面的考虑可以推广到具有和球面不同亏格的曲面上的网络. 一个 p 亏曲面(具有亏格 p 的曲面)可以通过如下方法得到：在一个球面上去掉 $2p$ 个小圆片，再把小圆周逐对连接起来，但连接时避免相遇. 附图表示二亏曲面. 一亏曲面叫做环面. 可以证明，拓扑等价的一切可定向闭曲面有相同的亏格，而每一个可定向闭曲面属于一个按亏格划分的类.



一个 p 亏曲面上的一切网络有相同的示性数 $\chi(p)$.

证明这个重要定理，可以采用我们证明特殊情况 $p=0$ (球

1) 若这样的公共内点不存在，可以把其中一个三维凸腔移位，使它和另一个三维凸腔有公共内点. ——译者注

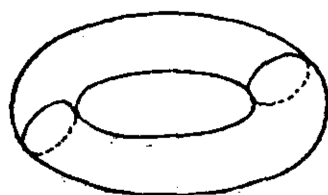
2) 球面或其它曲面上网络的重分和多面形的重分完全类似. ——译者注

面)时的方法：已给曲面上两个网络 P, Q,把它们“合并”，就得到 S,而 S 是 P 的重分，也是 Q 的重分，故

$$\chi(S)=\chi(P)=\chi(Q).$$

这样就证明了每一个 p 亏曲面有一个示性数 χ. 我们要把 χ 表成 p 的函数 $\chi(p)$. 为此，我们采用归纳法.

先确定环面的亏格.附图中的两条剖线把环面分成两部分；每一部分等价于去掉两个二维腔的球面，因而示性数为零. 把两部分接起来不会改变示性数；因为在剖线上，棱数和顶点数相等，在计算示性数时，这两数互相抵消. 于是证明了 χ(环面) $=0$.



对于一个 p 亏曲面，我们把它切成两部分：一部分是去掉一个二维腔的环面，另一部分是去掉一个二维腔的 $p-1$ 亏曲面. 前者的示性数是-1，后者的示性数是 $\chi(p-1)-1$. 象上面那样，把两部分接起来，其示性数不变，因此

$$\chi(p)=\chi(p-1)-2. \tag{7.1}$$



由于

$$\chi(0)=\chi(\text{球面})=2, \tag{7.2}$$

所以，根据归纳法，由 (7.1) 和 (7.2)，得

$$\chi(p)=2-2p. \tag{7.3}$$

8. 对于黎曼面[1]的应用

一个 p 亏曲面 Σ 可以通过一个单值连续函数映射在球面 S 上.

Σ 上，除有限多个点(支点)外，每一个点都有这样一个小邻域，在映射中，它和 S 上的一个小区域之间有一一对应关系.

此外，我们假定，在 S 上，除了 Σ 上的支点的象外，每一点都被

1) 按照拓扑观点，一个黎曼面是具有一定亏格的闭曲面. ——译者注

相同的数目的叶所覆盖，假定这个叶数是 s。

设$\sum$上 m 重支点的个数是 w_m，令 $w=\sum_m mw_m$。

问题是把 p 写成 s 和 w 的函数。

在 S 上作一个网络，并把它投射在黎曼面$\sum$上，但规定$\sum$上的支点在 S 上的象都是网络的顶点。

设 e, k, f 和 $\varepsilon, \kappa, \varphi$ 依次为 S 和$\sum$的顶点数、棱数、面数，则

$$\varphi=sf,\ \kappa=sk,\ \varepsilon=se-w,$$

$$p=1-\frac{1}{2}\chi(p)=1-\frac{1}{2}(\varphi-\kappa+\varepsilon)$$

$$=1-\frac{1}{2}s(f-k+e)+\frac{1}{2}w,$$

即

$$p=1-s+\frac{1}{2}w, \tag{8.1}$$

这就是所求的结果。

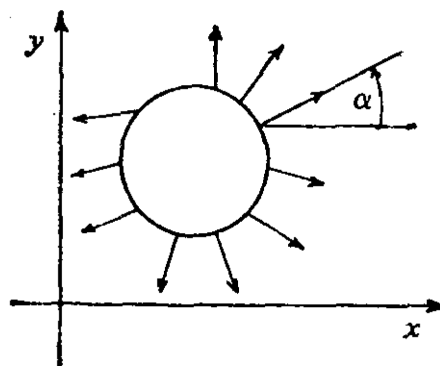
关系 (8.1) 的一个有趣的推论是，w 总是偶数。

考虑函数 $\sqrt{(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)\cdots(\zeta-a_{2n})}$[1] 所对应的黎曼面。这时 $w=2n$，$s=2$，$p=1-2+n=n-1$。故黎曼面可以用一个 $(n-1)$ 亏曲面表示。

问题 1．若用一个 q 亏曲面代替球面，考虑由一个 p 亏曲面到一个 q 亏曲面的点变换，公式 (8.1) 将用什么替代？

9. 欧拉示性数在矢场论中的作用

平面矢场定义 除了有限多个点外，每一点都规定了一个方



1) a_i 互不相同．——译者注

向，而这个方向(用幺矢表示)在平面上(除上述的点外)是连续函数;那些例外的点叫做**奇点**.

奇点的指数 以一个奇点为中心,作一个小圆,使圆内或圆上都没有矢场的其它奇点. 在圆周上取任意一点为始点，设 α 为矢场在该点的矢量和正 x 轴所作的角，则有向角 $\alpha(\bmod 2\pi)$ 是唯一确定的. 当 α 的始值固定以后,令该点在圆周上移动,假定在动点的矢量方向是圆周弧长的连续函数,则在圆周上任意点,矢量方向也唯一地确定. 当该动点绕圆一周回到原处时，矢量方向的变化将是 2π 的一个整数倍:

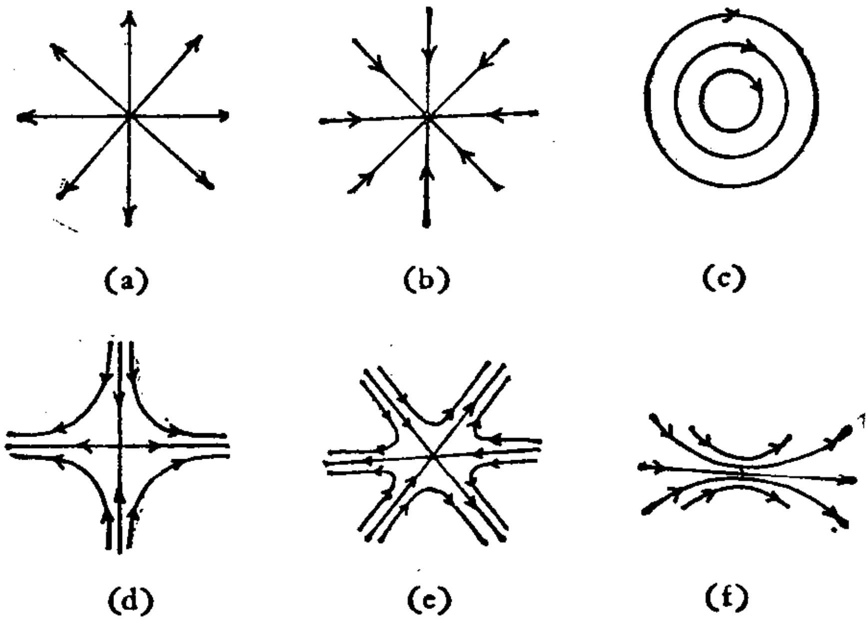
$$\alpha(2\pi)-\alpha(0)=2\pi j,$$

这里的整数 j 就叫做奇点的**指数**.

a) j 是有限整数,和在圆周上所选始点无关.

b) j 和所取的特殊圆无关,只要圆内和圆周上没有奇点.(这是因为一个圆可以连续变形为另一圆,而 j 必须连续变化,因而在圆的变形中 j 保持不变.)

矢场奇点的例:



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

如果把这些矢场看作梯度场,则

(a) 是一个源,对应于一个极大点,

(b) 是一个汇,对应于一个极小点,

(c) 是一个涡，

(d) 是一个简单鞍点，

(e) 是一个猴鞍点，

(f) 是一个双极。

上面这些奇点的指数是：

(a) 1	(b) 1	(c) 1
(d) −1	(e) −2	(f) 2.

根据我们的定义，指数等于沿正向绕奇点 x 一周时矢场方向相对于水平平行矢场的变化乘以 $\frac{1}{2}\pi$. 但绕一个正则点一周时，矢场方向的变化为零，故在指数定义中的那个水平平行矢场可以代以一个在 x 的充分小的邻域内没有奇点的矢场.

在研究闭曲面上的矢场时，这个推广了的指数定义很有用.

定义 设Σ为闭曲面，它在每一点有连续一阶偏导函数；则Σ在它的每一点有切面，其法线在Σ上连续变化. 考虑Σ上一个切（幺）矢场，这个矢场除在Σ上有限多个点外，是确定而且连续的. 那些例外点就叫做奇点. 具有这样性质的矢场叫做正则矢场.

奇点的指数 已给Σ上正则矢场 $\boldsymbol{F}$，设 x 为 $\boldsymbol{F}$ 的一个奇点. 取Σ上含 x 而不含其它奇点的一个小区域，并设区域的边界是简单闭线. 由于Σ在每点有连续一阶导函数，只要上述区域充分地小，我们就可以在它上面取一个没有奇点的局部矢场 $\boldsymbol{F}_0$. 绕上述区域边界一周，矢场 $\boldsymbol{F}$ 方向相对于矢场 $\boldsymbol{F}_0$ 的变化乘以 $1/(2\pi)$，就叫做 $\boldsymbol{F}$ 在 x 的指数.

注意要确定Σ上两个矢场 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 在一点 x 的指数之差，并不需要有一个局部无奇点的矢场 $\boldsymbol{F}_0$. 因为 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 在 x 的指数之差等于沿正向绕 x 一周 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 方向之间的角的变化乘以 $1/(2\pi)$.（这时，矢场 $\boldsymbol{F}_0$ 在定义中的作用抵消了.）

这个考察对于证明下面的定理具有重大作用.

闭曲面Σ上一个正则矢场的一切奇点的指数之和等于Σ的示性数：

$$\sum_r i_r = \chi(\Sigma). \tag{9.1}$$

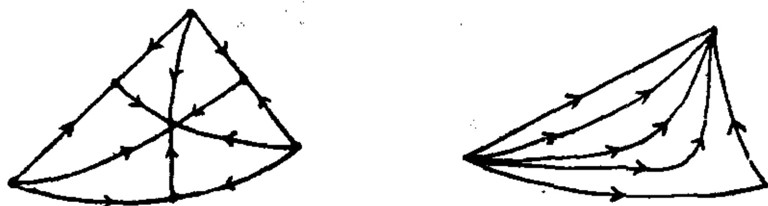
证明 证明分两部分：第一部分先证明，对于Σ上一切正则矢场，$\sum_r i_r$有相同的值。

设 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 为Σ上两个正则矢场。在Σ上取一个网络，它的棱和顶点上都没有 $\boldsymbol{F}$ 或 $\boldsymbol{F}'$ 的奇点，而且在它的任何二维腔里都至多有 $\boldsymbol{F}$ 或 $\boldsymbol{F}'$ 的一个奇点。因为只有有限多个奇点，这是容易办到的。

在每一个二维腔里，奇点指数之差 $i_F - i_{F'}$ 等于沿正向绕该二维腔的边界一周，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 方向之间的角的变化乘以 $1/(2\pi)$。但若对一切二维腔取 $i_F - i_{F'}$ 的和，则结果是零；因为每一条棱属于两个二维腔的边界，而在计算 $\sum(i_F - i_{F'})$ 时，这条棱沿相反方向经过两次，因而其所起作用是零。故 $\sum i_F = \sum i_{F'}$，即指数和与矢场的选取无关。

证明的第二部分是构造一个特殊的矢场，并对它计算 $\sum i$。

在Σ上，先取一个以三角形为二维腔的网络。然后在每个三角形上再引进四点，即各边的中点和三角形内部的一点。把这个内点和三角形顶点以及各边中点相连，并规定这些联线的正向是指向那个内点的，再规定三角形各边上的半线是指向中点的(见图)，于是原来的每个三角形都分成六个。

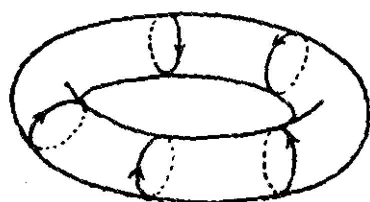


容易看出，在Σ上可以构造一个连续矢场，使得它在各小三角形内部的方向和在三角形边上的一致。这个矢场在原网络中每个三角形顶点有一个奇点，在三角形各棱上以及内部也各有一个奇点。此外，在顶点和在内点的奇点指数都是$+1$，因为它们是源或汇，而在棱上的奇点指数都是-1，因为它们都是简单鞍点。若 e，

k, f 表示网络的顶点数、棱数和二维腔数，则 (9.1) 式

$$\sum_r i_r = e - k + f = \chi(\Sigma). \qquad \text{证毕.}$$

根据 (9.1)，我们可以回答一个重要问题：在什么曲面上有不含奇点的矢场？若无奇点，则 $\sum i_r = 0$，因而根据 (9.1)，$\chi(\Sigma) = 0$. 因此，环面是唯一具有上述性质的曲面. 事实上，在环面上无奇点矢场的确存在（如图）.



10. 欧拉定理的纯组合证明（柯西 (Cauchy)）

网络定义 n 维欧氏空间里一个网络是由有限多点（顶点）和直线段（棱）所构成的，这些棱是一部分顶点的联线，而任意两条棱没有公共内点. 若一条棱的端点是 p_i, p_j，它就用 p_ip_j 表示.

球面上一个网络是有限多个点（顶点）和大圆弧（棱）所构成的，任意两个顶点至多被一条棱所联结，任意两条棱没有公共内点.

引进以下记号：

e = 顶点数，　　k = 棱数，

f = 连通开域数，　　c = 网络的分图数.

（所谓分图是网络的一个连通部分，它和网络其它部分不相连.）

于是以下等式成立

$$e - k + f = 1 + c. \tag{10.1}$$

我们证明这个定理时，在一些地方必须假定网络是在一个球面上（不是在亏格 $\neq 0$ 的曲面上）. 我们用到关于弧折线的若当 (Jordan) 定理：

若当定理 在球面上，每一条简单的闭弧折线把球面恰好分成两个连通开域. 此外，在折线的每段弧的充分小的邻域内，它两侧的点属于不同开域.

我们采用对棱数的归纳法来证明 (10.1)，

当 $k = 0$ 时，(10.1) 成立；因为这时网络为 e 个孤立顶点所构

成,因而

$$f = 1,\ c = e,$$

于是

$$e - k + f = e - 0 + 1 = 1 + c.$$

我们现在证明,若 $k = n$ 时,(10.1) 成立,则 $k = n+1$ 时,它也成立. 为此,我们从网络的 $n+1$ 条棱中去掉一条,并证明在一切情况下,(10.1) 左右两边都减去相同的数. 但我们必须首先引进自由顶点的概念. 网络中,自由顶点是只属于一条棱的顶点.

引理 若一个有棱网络 Q 不含有自由顶点,它必含有至少一条由 Q 的棱所构成的简单闭弧折线.

引理的证明 由于 Q 有棱,根据假设,它必有一个顶点 p_1 以及以 p_1 为端点的一条棱 p_1p_2;因 p_2 不是自由的,必有以 p_2 为端点而与 p_2p_1 不同的棱 p_2p_3. 照此办法,就得到一系列的顶点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 其中每两个相邻顶点都连成一条棱而每三个相邻顶点都各不相同. 由于 Q 里只有有限多个顶点,我们迟早要遇到一个 p_n, 和以前一个 p_r 重合, $p_n = p_r$, $r < n$. 若 p_r 是所遇到的第一个,则

$$p_rp_{r+1}p_{r+2}\cdots p_r$$

是一个闭的弧折线,它至少有三个棱,这样,就证明了引理.

现在开始用归纳法.

假定对于 $k = n$ 的一切网络,(10.1) 成立. 设网络 Q 有 $n+1$ 条棱. 分两种情况来考察:

(I) Q 有自由顶点;

(II) Q 设有自由顶点.

对于 (I) 款,设 p 为自由顶点,它被一条棱连到另一个顶点 p′,若 p′ 也是自由顶点,则去掉棱 pp′(保留顶点 p, p′)以后,e 不变,f 不变,k 减 1,c 增 1. 若 p′ 不是自由顶点,则去掉 pp′ 后,e 不变,k 减 1,f 不变,c 增 1. 显然 (10.1) 两边的变化总相同.



对于 (II) 款,没有自由顶点,根据引理,有一个简单而闭的

弧折线．去掉这个折线的一条棱，e 不变，k 减 1，c 不变，f 减 1（因为所去掉的棱两侧本来属于不同开域）．这时 (10.1) 两边变化还是相同．

这就完成了 (10.1) 的证明．

利用 (10.1)，我们将推得组合拓扑学的两项经典结果．

11. 关于一维复形的一般概念

一个一维复形是有限多个元素(顶点) $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 及元素偶(棱) p_ip_j 所构成的，每个顶点至少在一条棱上．

一维复形的嵌入 已给一个一维复形 C，若在 n 维欧氏空间 E_n 里(或球面 S 上)，有具下面性质的网络 Q，则 C 称为嵌入 E_n(或 S)：对应于 C 的每个顶点 p，有 Q 的唯一的一点 p'；对应于 C 的每条棱 p_ip_j，有 Q 的唯一的一条以 p_i' 和 p_j' 为端点的不相交的弧折线．

若 E 和 K 表示 C 的顶点数和棱数，e 和 k 表示 Q 的顶点数和弧折线数，则由定义可知 $e-k=E-K$．

下面我们构造两个一维复形，并证明它们都不能嵌入球面 S．

(A) 设复形 A 为五个顶点 $p_i(i=1,\cdots,5)$ 和十条棱 $p_ip_j(i=1,\cdots,5,\ j=1,\cdots,5,\ i<j)$ 所构成．假定它可以嵌入 S，则有满足 (10.1) 的网络 Q．于是，由于 Q 显然是连通的，$c=1$，故

$$f=2-(e-k), \tag{11.1}$$

$$e-k=E-K=5-10=-5.$$

把后式代入 (11.1)，得

$$f=2-(-5)=7.$$

设 i 表示复形的棱和网络的开域的关联[1)]总数．由于 A 的每条棱在一个弧折线上，根据若当定理，它属于两个域的边界*)：

$$i=2K.$$

另一方面，每个开域至少有复形的三条棱在它的边界上

1) 在这里我们实际上是设想 A 就在 S 上，因而 A 的棱可以和 Q 的一些开域相关联(即作为开域边界的一部分)．——译者注

*) 实际上我们所需要的是 $i\leqslant 2K$．

$$3f \leqslant i.$$

把 $f = 7, K = 10$ 代入

$$3f \leqslant i = 2K,$$

得

$$21 \leqslant 20,$$

这是矛盾的. 所以复形 A 不能嵌入球面.

(B) 设复形 B 为六个顶点 $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ 和九条棱 p_iq_j $(i, j = 1,2,3)$ 所构成. 假定 B 可以嵌入 S, 则 S 上有网络 Q, 满足

$$E = 6, K = 9, f = 2 - (6 - 9) = 5,$$

设 i 为复形的棱和网络的域的关联总数,则

$$i = 2K$$

如前. 不可能有三角域, 否则它的三个顶点中至少有两个 p 或两个 q, 但无论两个 p 或两个 q 都没有棱连接它们. 而三角形的每两个顶点都是相连的. 因此,每个域的边界至少有四条棱:

$$4f \leqslant i,$$

把 $f = 5, K = 9$ 代入

$$4f \leqslant i = 2K,$$

得

$$20 \leqslant 18.$$

由这个矛盾可知复形 B 不能嵌入球面.

不能嵌入球面的复形叫做**奇复形**. 若奇复形去掉任意一条棱就可以变成非奇复形,则奇复形称为**不可约的**.

Kuratowski 证明了 A 和 B **是仅有的两个不可约奇复形**.

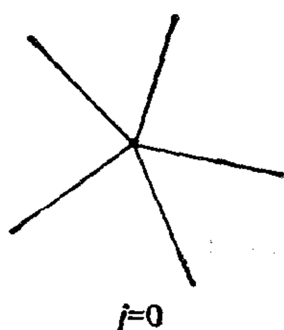
12. 柯西的一个定理

另一个利用 (10.1) 可以推得的结果是柯西的一个定理, 这个定理在他证明凸多面形的刚性中起了很大的作用.

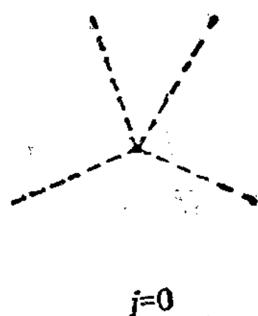
已给球面 S 上不含有自由或孤立顶点的一个网络 Q, 我们把它的棱分成两组 X 和 Y,使它们都成为网络. 在 Q 的每个顶点,两

个相邻的棱之间有一个介乎 0 与 2π 间的角[1]，其中，两条棱属于不同组(即一属于 X，一属于 Y) 的角的个数，叫做该顶点的级。顶点的级是一个非负偶数。

———— X 的棱
-------- Y 的棱
j = 顶点的级



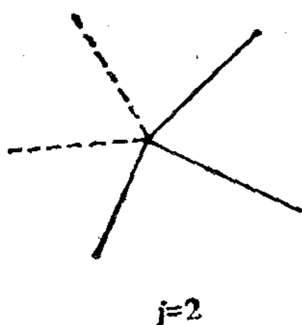
$j=0$



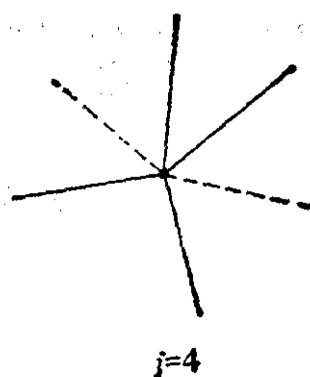
$j=0$



$j=2$



$j=2$



$j=4$

设 α 为 0 级顶点数，β 为 2 级顶点数，$\Gamma_\nu, \nu=1,2,\cdots$ 为 $2+2\nu$ 级顶点数。设 w 为在一切顶点的角的总数，w_1 为同一组的棱所作的角数，w_2 为不同组的棱所作的角数。由于 Q 没有自由顶点，每一条棱属于四个角，而每个角有两条棱，故

$$2k = w = w_1 + w_2. \tag{12.1}$$

由于一个三角形的三条棱中，至少有两条属于同一组，

$$w_1 \geqslant \text{三角形个数} = f_3.$$

1) 在这里，不相邻的棱不认为作成角，而且，如果在一个顶点只有两条棱，它们就作两个角，这两个角之和是 2π. ——译者注

根据公式(3.1),(3.2),即 $2k=\sum_{n\geqslant 3} nf_n$, $f=\sum_{n\geqslant 3} f_n$,可知

$$2k=3f_3+4f_4+5f_5+\cdots\geqslant 3f_3+4(f_4+f_5+f_6+\cdots)$$
$$=3f_3+4(f-f_3)=4f-f_3\geqslant 4f-w_1.$$

把这式和(12.1)相加,得

$$4k\geqslant 4f+w_2,$$

或

$$w_2\leqslant 4(k-f). \tag{12.2}$$

根据(10.1), $k-f=e-1-c\leqslant e-2$. 代入(12.2),得

$$w_2\leqslant 4e-8. \tag{12.3}$$

根据定义

$$w_2=2\beta+\sum_{n\geqslant 1}(2+2n)\Gamma_n, \tag{12.3'}$$

而顶点总数

$$e=\alpha+\beta+\sum_{n\geqslant 1}\Gamma_n.$$

合并(12.3)和(12.3′),并把上式代入,得

$$2\beta+\sum_{n\geqslant 1}(2+2n)\Gamma_n\leqslant 4\alpha+4\beta+4\sum_{n\geqslant 1}\Gamma_n-8.$$

整理后得

$$2\alpha+\beta\geqslant 4+\sum_{n\geqslant 1}(n-1)\Gamma_n\geqslant 4. \tag{12.4}$$

级数≥4的顶点(由于明显的原因)叫做**交叉点**. 不等式(12.4)表明,若把 S 上一个网络 Q 的棱分为两组 X 和 Y, **至少有两个顶点不是交叉点**.

这个定理和关于 S 上矢场的奇点总数的定理有相似处.

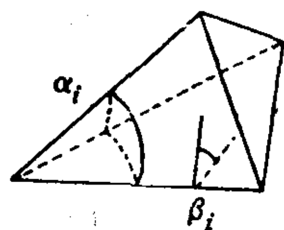
13. 德瓜公式

我们将建立并证明欧拉定理到 n 维的推广. 为此,我们先把证明二维情形的欧拉定理时所用到的概念和引理加以推广. 在勒

让德尔和施泰因内尔的证明里，我们论证了涉及球面和平面三角形的诸角和的定理．这些定理可以推广到 n 维空间，其结果是优美的，但不那么为人所熟知．

有一个为德瓜 (de Gua, 1783) 所发现的，把四面形的立体角和二面角联系起来的公式．

设 $\alpha_i(i=1,2,3,4)$ 表示四面体在顶点的立体角(三面角)，而 $\beta_i(i=1,2,\cdots,6)$ 是两面角．以顶点为中心作幺球面，则三面角在球面上所含的面积可以用来作为立体角的测度，二面角则按通常方法去度量，因而等于一个球面角，如图所示．根据关于球面三角形三角和的定理（见第 2 节)，对于每个顶点，



$$\pi+\alpha_i=\sum\beta, \tag{13.1}$$

右边的和是对第 i 个顶点的三个棱所取的．

对于一切顶点取总和，则因每个二面角出现于两个顶点，得

$$\sum\alpha-2\sum\beta=-4\pi.$$

除以 4π，就得德瓜公式

$$\frac{1}{4\pi}\sum\alpha-\frac{1}{2\pi}\sum\beta=-1. \tag{13.2}$$

若改变度量单位，以整个球面所含的立体角为 1，而以两个作 2π 角的平面所作的两面角为 1，(13.2) 可以写成较对称的形状

$$\sum\alpha-\sum\beta=-1. \tag{13.2'}$$

若更进一步，人为地对应于四面形的每个面赋予一个角 γ_i $(i=1,2,3,4)$，$\gamma_i=1/2$（这是以该面任意点为中心的一个内半球面[1]所含的立体角)，再对应于四面体内部赋予另一个角 $\delta=1$ (这是以任意内点为中心的内球面所含的立体角)，则 (13.2) 可以写成更加对称的形状

1) 所谓“内球面”或“内半球面”是指含在四面形里的球面或半球面．——译者注

$$\sum\alpha-\sum\beta+\sum\gamma-\sum\delta=0. \qquad (13.2'')$$

写成这个形状时，这公式最容易推广到 n 维.

14. n 维单形定义

设在 n 维欧氏空间 E_n 里，已给 $n+1$ 个点，它们不在维数小于 n 的线性空间里，我们引进以下的坐标系： 取所给 $n+1$ 个点之一为原点 O，则 E_n 的每一点 $\boldsymbol{X}$ 可以写成其余 n 个点 $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 的线性组合

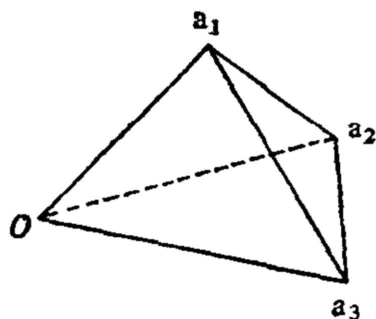
$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i x_i,$$

其中 x_i 为实数. 坐标满足不等式

$$\begin{cases}x_\nu\geqslant 0,\ \nu=1,2,\cdots,n,\\ \sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\leqslant 1\end{cases} \qquad (14.1)$$

的点的集合叫做以 $O,\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 为顶点的 n 维单形.

满足不等式 (14.1)，但其中至少有一个等式成立的点，构成单形的边界，它含有 $n+1$ 个面 ($(n-1)$ 维单形)，每个面在一个超平面 ($(n-1)$ 维线性空间) 上.



经过空间一点，取 $n+1$ 个超平面分别平行于单形的面所在的超平面；为方便起见，可以取 O 为那个点. 每一个这样的超平面 P_i，$i=1,2,\cdots,n+1$，把空间分为两半. 对于经过 O 的每一个 P_i，含单形在内的那半个空间叫做正半空间，另一半叫做负半空间；对于剩下的不经过 O 的那个 P_i 则相反，含单形在内的那半个空间叫做负半空间，另一半叫做正半空间[1].

引理 I 空间没有一个点是在经过 O 的所有超平面 P_i 的正

---

1) 对于单形各面所在的超平面，则含单形在内的那半个空间是正半空间，另一半是负半空间. ——译者注

（或负）侧的.

引理 I 的证明 各个经过 O 而含有单形一个面的超平面的正半空间由不等式

$$x_\nu > 0,\ \nu = 1, 2, \cdots, n \tag{14.2}$$

确定，平行于剩下那个面的超平面的正半空间由不等式

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu < 0 \tag{14.2'}$$

确定. 显然 (14.2) 和 (14.2′) 是不能同时满足的. 证毕.

单形的 $(n-r)$ 个面的交集是单形的一个 r 维腔. 对于这样一个 r 维腔，我们赋予一个立体角如下：以 O 为中心作 $(n-1)$ 维幺球面，经过 O 且平行于那 $(n-r)$ 个超平面的正半空间的交集确定幺球面的一部分，这部分的立体角就是 r 维腔的立体角.（选择立体角的单位，使整个球面的立体角是 1.）

引进下面诸函数 f_i:

当 $\boldsymbol{X}$ 在 P_i 正侧时，$f_i(\boldsymbol{X}) = 1$，否则 $f_i(\boldsymbol{X}) = 0$.

令 $S = 1$ 表示 $(n-1)$ 维幺球面的总面积.

设 α_i 为赋予 $P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_{n-r}}$ 的交集的（立体）角. 根据定义，

$$\alpha_r = \frac{1}{S}\int f_{i_1}(\boldsymbol{X}) f_{i_2}(\boldsymbol{X}) \cdots f_{i_{n-r}}(\boldsymbol{X}) dS, \tag{14.3}$$

其中积分的范围是整个 $(n-1)$ 维幺球面.

设 σ_r 为一切 r 维腔的角之和，即 $\sigma_r = \sum \alpha_r$.

本节的引理 I，通过函数 $f_i(\boldsymbol{X})$ 来表达，就是：对于一切 $\boldsymbol{X}$，乘积

$$\prod_{i=1}^{n+1} f_i(\boldsymbol{X}) = 0,\quad \prod_{i=1}^{n+1} (1 - f_i(\boldsymbol{X})) = 0.$$

把第二个乘积展开，由于第一个乘积恒等于零，得

$$1 - \sum f_i + \sum f_{i_1} f_{i_2} + \cdots + (-1)^n \sum f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_n} = 0. \tag{14.4}$$

在 $(n-1)$ 维幺球面上逐项积分，利用 (14.3) 以及 σ_r 的定义，得

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\sigma_r=0.$$

这个证明是庞加莱（Poincaré）所给出的。

对于退化情形，$\sigma_{n-1}=\frac{1}{2}(n+1)$，$\sigma_n=1$，故得系理

$$\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\sigma_r=(-1)^n\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

15. n 维凸多面形的欧拉示性数

一个 n 维凸多面形是一个凸点集，它的边界是有限多个 $(n-1)$ 维凸多面形所构成的，其中每两个 $(n-1)$ 维凸多面形或者没有公共点，或者有一个公共的 $r(r<n)$ 维腔。

已给一个 n 维凸多面形，取其中一个 r 维腔 $(r\leqslant n)$，并以它的一点为中心作一个 n 维球。我们赋予该 r 维腔一个角，等于该 n 维球在多面形内部的 n 维立体角。

用 σ_r 表示一切 r 维腔的角之和。

用 e_r，$r=0,1,\cdots,n$，表示一个 n 维凸多面形 P 的 r 维腔数。作为 P 的示性数 $\chi(P)$ 的定义，我们令

$$\chi(P)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r. \tag{15.1}$$

（这是三维空间欧拉示性数的自然推广。）

用 S^r 表示一个 r 维球。

设 C^r 为（凸）r 维腔，其内部细分为 r 维腔。设 e_t 表示其 t 维元素的个数，e'_t 表示其内部的 t 维元素的个数。作为定义，令

$$\chi(C^r)=\sum_{t=0}^{r}(-1)^t e_t,\quad \chi'(C^r)=\sum_{t=0}^{r}(-1)^t e'_t\ (r\geqslant t\geqslant 0). \tag{15.2}$$

所谓一个 r 维凸多面形的重分，是指对于它的 $(r-1)$ 维腔具有如下性质的重分：若两个 $(r-1)$ 维腔有一个公共的 t 维腔，则那两个 $(r-1)$ 维腔的重分在这个 t 维腔上必须是一致的。设

P' 表示 P 的一个重分.

作了如上准备之后,我们叙述下面四个定理,并将加以证明:

(I) $$\chi(S^r) = 1 + (-1)^r,$$

其中 $\chi(S^r)$ 是 r 维球面上任意网络的示性数,

(II) $$\chi(C^r) = 1,$$

(III) $$\chi'(C^r) = (-1)^r,$$

(IV) $$\chi(P) = \chi(P').$$

我们将对 (I) 和 (III) 同时采用归纳法来证明这四个定理.

当 $r = 1$ 时,容易验证,(I),(III) 都成立.

假定 (I),(III) 对于一切 $r < n$ 成立,我们将证明,对于 $r=n$, (I),(II),(III),(IV) 都成立.

已给一个 n 维腔,用 α 表示对它的一个 r 维腔所赋于的角,而 $\gamma = \frac{1}{2} - \alpha$ 表示其对应的外角; σ_r 是 r 维腔的角的和, 令 τ_r 为 r 维腔的外角和 $(\tau_{n-1} = 0)$.

令

$$\Omega = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma_r, \quad \Gamma = \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \tau_r.$$

引理 II 对于每个 n 维凸腔,

$$\Omega + \Gamma = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \tag{15.3}$$

$$\Omega = 0. \tag{15.4}$$

引理 II 的证明 取 n 维凸腔的一切 r 维腔的角之和,注意按定义 $\gamma = \frac{1}{2} - \alpha$,得

$$\tau_r = \frac{1}{2} e_r - \sigma_r, \quad \sigma_r = \frac{1}{2} e_r - \tau_r, \quad r \leqslant n - 1.$$

故(由于 $\sigma_n = 1$)

$$\Omega = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma_r$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \left(\frac{1}{2} e_r - \tau_r\right) + (-1)^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r e_r - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \tau_r + (-1)^n.$$

但一个 n 维凸腔的边界可以看作一个 $(n-1)$ 维球面上的一个网络，所以

$$\Omega = \frac{1}{2} \chi(S^{n-1}) - \Gamma + (-1)^n.$$

按假定，对于 $r = n-1$，(I) 成立，故

$$\Omega + \Gamma = \frac{1}{2} (1 + (-1)^{n-1}) + (-1)^n = \frac{1}{2} (1 + (-1)^n).$$

这就证明了 (15.3).

把 n 维凸腔的 $n-1$ 维腔重分为单形(由下面运用归纳法的过程中可以看出，这样的重分是可能的). 在 (n 维腔的)一个 $(n-1)$ 维腔 C^r 内任意 γ 维腔 $(\gamma \leqslant r < n)$ 的角 $=\alpha_r$，即 C^r 的角；由于已经假定 (III) 对于 $r < n$ 成立，C^r 上的 γ 维腔对 Ω 提供的值 $= \chi'(C^r)\alpha_r = (-1)^r\alpha_r$，即 C^r 对 Ω 提供的值；因此，经过边界的重分，Ω 不变.

在这个经过重分的 n 维腔的内部取一点，并把它连到经过重分的边界上的一切顶点，就把 n 维凸腔重分成单形.

经过重分后，取任意一个单形，在原 n 腔边界上，单形的一个 $r-1$ 维腔和那个内点构成的 r 维腔叫做一个外 r 维腔. 若用 e_r 表示单形的内部 r 维腔数，用 e_r^* 表示外 r 维腔数，则

$$e_0 = 1, \ e_r = e_{r-1}^*, \ 1 \leqslant r \leqslant n. \tag{15.5}$$

根据 (14.5)，对于每个单形，(15.4) 成立，即

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma_r = 0. \tag{15.6}$$

由于每一个内部 r 维腔提供的角的总量是 1，

$$\sum \sigma_r = e_r + \sigma_r^*,$$

其中 σ_r^* 是 n 维腔重分后边界上 r 维腔的角之和. 于是对一切 n

维单形取 (15.6) 的和，就得

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e^r+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\sigma_r^*=0. \tag{15.7}$$

把 (15.5) 代入 (15.7)，得

$$1-\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r e_r^*+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\sigma_r^*=0. \tag{15.8}$$

一个凸 n 维腔的边界可以看作一个 $(n-1)$ 维球面上的一个网络，而由于假设了 (I) 对于 $r=n-1$ 成立，(15.8) 的第一个和可代以 $1+(-1)^{n-1}$；于是根据 Ω 的定义和 (15.8)，

$$\begin{aligned}\Omega=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\sigma_r^*&=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\sigma_r^*+(-1)^n,\\&=1+(-1)^{n-1}-1+(-1)^n=0.\end{aligned}$$

这就证明了 (15.4)。

利用引理 II，可以对 $r=n$ 证明 (III)。

假定把 C^n 重分为 C_i^n；对于每一个 C_i^n，(15.4) 成立：

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\sigma_r^i=0. \tag{15.9}$$

设 e_r' 为 C^n 的内 r 维腔数，σ_r^* 为 C^n 的 r 维腔的角之和. 由于每个内 r 维腔的角之和为1，对一切 i 取 (15.9) 的和，得

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r'+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\sigma_r^*=0,$$

故

$$\begin{aligned}\chi'(C^n)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r'&=-\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r e_r^*\\&=(-1)^n-\Omega=(-1)^n,\end{aligned}$$

这就对 $r=n$ 证明了 (III)。

为了证明 (II)，注意

$$\begin{aligned}\chi(C^n)&=\chi'(C^n)+\chi(S^{n-1})\\&=(-1)^n+(1+(-1)^{n-1})=1.\end{aligned}$$

为了证明 (IV)，我们指出：一个 r 维腔对于 $\chi(P)$ 提供的值

是(-1)，而根据(III)，在重分后，同一个 r 维腔对于 $\chi(P')$ 提供的份额也是$(-1)^r$.

由于 S^n 的两个网络有共同的重分(见§6)，S^n 上一切网络有相同的示性数。若对于一个 $n+1$ 维单形的网络计算示性数，则

$$e^r=\binom{n+2}{r+1},\ r=0,1,\cdots,n,$$

$$\chi(S^n)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n+2}{r+1}=1+(-1)^{n+2}$$

$$-\sum_{r=0}^{n+2}(-1)^r\binom{n+2}{r}=1+(-1)^n.$$

这就证明了(I)，而归纳完成.

16. n 维球单形

设已给一个半径为 R 的 n 维球以及 $n+1$ 个经过它的中心的超平面 P_i，每一个超平面 P_i 把整个空间分成两半，指定其中任意一半作为正半空间，另一半为负半空间.

令函数 f_i 的定义如下：

$$\left.\begin{matrix}\text{当 } \boldsymbol{X} \text{ 在 } P_i \text{ 正侧时}\\ \text{当 } \boldsymbol{X} \text{ 不在 } P_i \text{ 正侧时}\end{matrix}\right\} f_i(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1\\0\end{cases},\ i=1,2,\cdots,n+1.$$

满足 $f_1(\boldsymbol{X})=\cdots=f_{n+1}(\boldsymbol{X})=1$ 的点在球面上的闭包叫做一个 n 维球单形。球面上满足 $f_1(\boldsymbol{X})=\cdots=f_{n+1}(\boldsymbol{X})=0$ 的点构成另一个球单形，它和前一个成为对极关系，因而它们全等.

在球面上，$P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_{n-r}}$ 等 $n-r$ 个超平面确定球单形的一个 r 维腔。这个单形的角 α_r 的定义是

$$\alpha_r=\frac{1}{C_nR^n}\int f_{i_1}(\boldsymbol{X})f_{i_2}(\boldsymbol{X})\cdots f_{i_{n-r}}(\boldsymbol{X})dS,\qquad(16.1)$$

其中 C_n 是常数，C_nR^n 是 n 维球的表面积.

考虑乘积

$$(1-f_1(\boldsymbol{X}))(1-f_2(\boldsymbol{X}))\cdots(1-f_{n+1}(\boldsymbol{X})).$$

当 $\boldsymbol{X}$ 是在那个对极单形内时，它的值是 1，否则它的值是零。若用

A_n 表示球单形的面积(=对极单形面积),则

$$\int(1-f_1(\boldsymbol{X}))(1-f_2(\boldsymbol{X}))\cdots(1-f_{n+1}(\boldsymbol{X}))dS=A_n.$$

逐项积分,得

$$\begin{aligned}\int(1-\sum f_i(\boldsymbol{X})+\sum f_{i_1}(\boldsymbol{X})f_{i_2}(\boldsymbol{X})+\cdots\\+(-1)^n\sum f_{i_1}(\boldsymbol{X})f_{i_2}(\boldsymbol{X})\cdots f_{i_n}(\boldsymbol{X})\\+(-1)^{n+1}f_1(\boldsymbol{X})f_2(\boldsymbol{X})\cdots\\+f_{n+1}(\boldsymbol{X}))dS=A_n.\end{aligned}\tag{16.2}$$

由于当 $\boldsymbol{X}$ 是在球单形内时, $f_1(\boldsymbol{X})\cdots f_{n+1}(\boldsymbol{X})$ 等于 1,否则等于 0,积分 $\int f_1(\boldsymbol{X})\cdots f_{n+1}(\boldsymbol{X})dS=A_n$. 因此,(16.2) 可以写成

$$C_nR^n\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\sigma_r=(1+(-1)^n)A_n.\tag{16.3}$$

我们分两款来考察:

(i) n 是偶数,

(ii) n 是奇数.

采用以前的记号,

$$\Omega=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\sigma_r,\quad \Gamma=\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\tau_r,$$

则在 (i) 款 (16.3) 可以写成

$$C_nR^n\Omega=2A_n,$$

或

$$\Omega=\frac{2}{C_n}\frac{A_n}{R^n}.\tag{16.4}$$

可以用 Γ 表示 (16.4): 把 (16.4) 代入 (15.3),得

$$\frac{2}{C_n}\frac{A_n}{R^n}+\Gamma=1.$$

根据 A_n 的定义,把它写成积分,最后恒等式可以写成

$$\int\frac{dS}{R^n}+\frac{C_n}{2}\Gamma=\frac{C_n}{2},\tag{16.5}$$

其中积分范围是球单形． 这是关于球单形的高斯-崩尼（Gauss Bonnet）公式．

在 (ii) 款，n 是奇数，(16.3) 和 (15.3) 给出

$$\Omega = \Gamma = 0. \tag{16.6}$$

上面的推导是庞加莱的．他利用 (16.4) 和 (16.6)，并令 $R \to \infty$ 以得到 (15.4)．

利用 (16.4) 和 (16.6)，容易把勒让德尔关于欧拉公式的证明推广到 n 维．

第二章

初等微分几何选讲

1. 曲率

设 $\boldsymbol{X}(t)=(x(t), y(t), z(t))$ 为三维欧氏空间一条曲线的参数方程；假定函数 $x(t), y(t), z(t)$ 有连续二阶导函数. 按以下方法作 $\boldsymbol{X}(t)$ 的球面象：设 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 为曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 上的任意点，过原点作有向半线平行于曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 的有向切线，取这条半线和以原点为中心的幺球面的交点作为 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 的球面象；令 t 变化，就得到 $\boldsymbol{X}(t)$ 的**球面象**，由曲线 $\boldsymbol{X}(t)$ 的可微性可知它的球面象有连续一阶导函数.

引进曲线 $\boldsymbol{X}$ 从它上面一个固定点量起的弧长 s 作为参数. 若 $\Delta\sigma$ 表示球面象上在 s 和 $s+\Delta s$ 之间的弧长，则极限

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}=\frac{d\sigma}{ds}=k(s)$$

存在，k 就叫做曲线 $\boldsymbol{X}$ 在 s 的**绝对曲率**或简称在 s 的曲率.

两点 s_1 和 s_2 之间的**总曲率**是球面象的长，

$$K=\int_{s_1}^{s_2}k\,ds=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}d\sigma.$$

一条平面曲线[1]的球面象显然是在一个大圆上. 可以规定这个大圆的一个正向：当曲线在 s 的切线到它在 $s+\Delta s$ 的切线是沿正向(即反时针方向)转动时，$\Delta\sigma$ 是正的，反之 $\Delta\sigma$ 是负的.

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}=\frac{d\sigma}{ds}=k_1(s)$$

叫做曲线的**有向曲率**. 显然 $|k_1|=k=$ **绝对曲率**.

对于三维空间曲线，用 $u(s_1, s_2)$ 表示在 s_1 和在 s_2 的切矢之间

1) 假定平面曲线是在一个有向平面上，例如在 xy 平面上. ——译者注

的角，$0 \leqslant u(s_1, s_2) \leqslant \pi$．这个角等于幺球面上 $\boldsymbol{X}(s_1)$ 和 $\boldsymbol{X}(s_2)$ 的球面象之间的球面距离．由于大圆弧是短程线，

$$u(s_1, s_2) \leqslant \int_{s_1}^{s_2} k ds. \tag{1.1}$$

若曲线总曲率$\leqslant \pi$，则只有当 X 是平面曲线，而且切线转动的方向不变（即总沿正向或总沿反向）时，等号才成立．

对于平面曲线，取 k_1 如上，则当 s_1 到 s_2 的总曲率 $\leqslant \pi$ 时，

$$u(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} k_1 ds. \tag{1.1'}$$

引理 I 若两条平面曲线 $\boldsymbol{X}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{X}_2(s)$ 满足条件：

(a) 对于一切 s 值，它们有相同的曲率，

(b) 对于一点 s_0，$\boldsymbol{X}_1(s_0) = \boldsymbol{X}_2(s_0)$，$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s_0) = \dot{\boldsymbol{X}}_2(s_0)$，则对于一切 s 值，$\boldsymbol{X}_1(s) = \boldsymbol{X}_2(s)$，即两条曲线重合．

证明 由于曲率等于切线和 x 轴所作的角的导数，由 (a) 可知，对于一切 s 值，$\tan^{-1}(\dot{y}_1/\dot{x}_1) = \tan^{-1}(\dot{y}_2/\dot{x}_2)$．由此得知 $\dot{y}_1/\dot{x}_1 = \dot{y}_2/\dot{x}_2$．但 $\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = 1$，故在任意点 s，方程

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1 = \dot{\boldsymbol{X}}_2, \ \dot{\boldsymbol{X}}_1 = -\dot{\boldsymbol{X}}_2 \tag{1.2}$$

中之一必成立．由于矢量 $\dot{\boldsymbol{X}}_1$，$\dot{\boldsymbol{X}}_2$ 总不是零，若 (1.2) 中一个方程对于 s 的一个值成立，它必然对于一切 s 值成立；但根据 (b)，$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s_0) = \dot{\boldsymbol{X}}_2(s_0)$，故对于一切 s，$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \dot{\boldsymbol{X}}_2(s)$ 成立．把这个方程积分，并利用 (b) 中的初始条件 $\boldsymbol{X}_1(s_0) = \boldsymbol{X}_2(s_0)$，我们就证明了引理 I．

我们指出，对于三维空间曲线，曲率相同并不表明曲线全等．

定理 A（舒尔 (A. Schur)） 设 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}'$ 是长度都等于 l 的两个弧，其端点依次是 a，b 和 a′，b′，而 $d = \overline{\mathrm{ab}}$，$d' = \overline{\mathrm{a'b'}}$ 表示端点间的距离；再令 $k(s)$ 和 $k'(s)$ 依次表示 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}'$ 的曲率，其中 s 是 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}'$ 依次从 a 和 a′ 量起的弧长．若 $\boldsymbol{C}$ 为平面曲线，它和联接两端点的弦一起构成一条简单凸曲线，而且对于每个 s 值 $(0 \leqslant s \leqslant l)$，$k'(s) \leqslant k(s)$，则

$$d' \geqslant d,$$

其中等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{C}\cong\boldsymbol{C}'$.

证明(施米特 (E. Schmidt)) 由于 $\boldsymbol{C}$ 有连续转动的切线,必有一点 s_1, $0<s_1<l$, 在那里, $\boldsymbol{C}$ 的切线平行于连接 a, b 的弦;令这点为 p.

据假设, $\boldsymbol{C}$ 和连接 a, b 的弦一起构成一条简单闭凸线, 所以 $\boldsymbol{C}$ 在 s 点和那个弦所作的角是 s 的单调函数,因而它在 $0\leqslant s\leqslant s_1$, $s_1\leqslant s\leqslant l$ 两弧上的变化都$\leqslant\pi$. 于是可以应用 (1.1′):

$$u(s_1, s)=\left|\int_s^{s_1}k(s)ds\right|,\quad 0\leqslant s\leqslant l.$$

应用 (1.1) 于 $\boldsymbol{C}'$:

$$u'(s_1, s)\leqslant\left|\int_s^{s_1}k'(s)ds\right|.$$

但据假设, $k'(s)\leqslant k(s)$,故

$$u'(s_1, s)\leqslant u(s_1, s).$$

取两边的余弦,则(因 $\cos\theta$ 在 0 与 π 之间是递减的)

$$\cos u'(s_1, s)\geqslant\cos u(s_1, s).\tag{1.3}$$

从 0 到 l 取 (1.3) 两边积分.右边积分等于弦 ab 在曲线 $\boldsymbol{C}$ 在 p 点的切线上的投影, 而由于这个切线平行于 ab, 这个积分等于 $\overline{\mathrm{ab}}=d$. 左边积分等于弦 a′b′ 在曲线 $\boldsymbol{C}'$ 在 p′ 点(对应于 $\boldsymbol{C}$ 上的 p) 的切线的投影长 d'', 故 $d''\leqslant\overline{\mathrm{a'b'}}=d'$. 由于积分后 (1.3) 的不等号保持不变,可知

$$d'\geqslant d.\tag{1.4}$$

不等式 (1.4) 中的等号成立的充要条件是:

(a) (1.1) 应用于 $\boldsymbol{C}'$ 时,等式成立,这表明 $\widehat{\mathrm{a'p'}}$ 和 $\widehat{\mathrm{p'b'}}$ 是平面弧.

(b) 在 $k'(s)\leqslant k(s)$ 中, 等号对于一切 s 成立, 即对于一切 s, $k'(s)=k(s)$.

(c) $d''=d'$.

根据引理 I, 平面曲线曲率相等表明曲线全等.因此,由 (a)和 (b) 可知 $\widehat{\mathrm{a'p'}}\cong\widehat{\mathrm{ap}}$, $\widehat{\mathrm{p'b'}}\cong\widehat{\mathrm{pb}}$. 我们要证明 $\widehat{\mathrm{a'p'}}$ 和 $\widehat{\mathrm{p'b'}}$ 在同一个

平面上.

假定 $\widehat{a'p'}$ 和 $\widehat{p'b'}$ 在不同平面上，则它们在 p′ 的公切线必须和两平面的交线重合. 但根据 (c)，C' 在 p′ 的切线必须平行于弦 a′b′，因而 a′ 和 b′ 都必须在两平面的交线上. 这表明弦 a′b′ 和弧 $\widehat{a'p'}$ 相交于 p′. 由于 $\widehat{a'p'} \cong \widehat{ap}$，我们可以把 C' 作刚体运动，使 $\widehat{a'p'}$ 和 $\widehat{ap}$ 重合，于是 a′ 和 a，p′ 和 p 重合，C 和 C' 在 p = p′ 的切线重合；又由于弦 ab 平行于在 p 的切线，它们也必须重合，因而弦 ab 和 C 相交于 p. 这同假设 C 和 $\widehat{ab}$ 构成简单闭凸线矛盾.

于是证明了 C' 是平面曲线，因而根据 (b) 和引理 I，$C \cong C'$.

证毕.

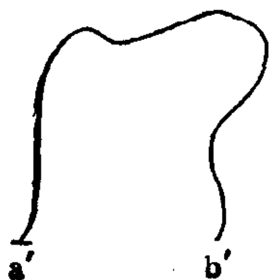
2. 施瓦尔茨的一个定理

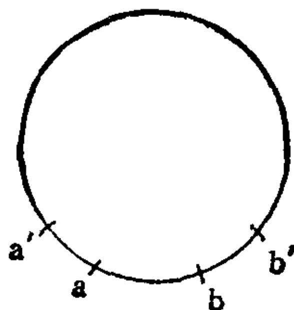
我们应用定理 A 来证明 H. A. 施瓦尔茨 (Schwarz) 的一个定理.

设已给两点 a′, b′，其间距离是 $\overline{a'b'} = d'$. 若选择一个值 $r \geqslant d/2$，就可以作一个半径等于 r 的圆经过 a′ 和 b′. 连接 a′ 和 b′ 的两个圆弧；一优一劣，都有常曲率 $1/r$.

现在考虑连接 a′，b′ 而曲率 $k(s) \leqslant 1/r$ 的一切曲线 C'. 施瓦尔茨的一个定理断定：这样的一条曲线 C' 的长 l 或者≤连接 a′ 和 b′，半径为 r 的圆的劣弧之长，或者 ≥ 优弧之长.

证明 若 $l \geqslant 2\pi r$，则 l 当然≥优弧长，因此可以只考虑 $l <$



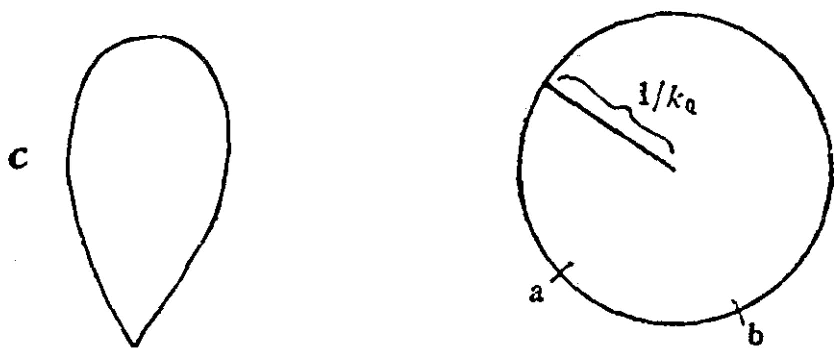


$2\pi r$ 的情况.设在半径为 r 的圆上取两点 a, b,使得圆上两弧之一 $\widehat{ab}=l$, 并取这段弧为定理A中的 $\boldsymbol{C}$. 由 (1.4) 可知 $\overline{ab}\leqslant\overline{a'b'}=d'$. 这表明,弦 a'b' 比弦 ab 更接近圆心;而这又表明优弧 $\widehat{a'b'}$ 之长 $\leqslant$优弧 $\widehat{ab}$ 之长, 劣弧 $\widehat{a'b'}$ 之长$\geqslant$劣弧 $\widehat{ab}$ 之长.但连接 a 和 b 的两弧之一的长$=l$.故上述结论正好是施瓦尔茨定理的论断.证毕.

3. 关于圆的一项最小性质

现在讨论以下问题: 已给正常数 k_0, 问两端点重合, 而曲率 $k(s)$ 满足不等式 $k(s)\leqslant k_0$ 的一切曲线中, 哪一条有最短的弧长? 这个问题是由一个物理课题引起的, 那就是: 如果要把一条金属线两端靠到一起而不折断它 (即曲率不能超过一定限度 k_0), 这条金属线至少要有多长?

我们将证明,这条曲线是半径为 $1/k_0$ 的圆, 为此,假定有一条曲线 $\boldsymbol{C}'$, 它的弧长 $l<2\pi/k_0$, 满足规定条件. 设 a, b 为半径等于 $1/k_0$ 的圆上两点,而且 a, b 所定的两个弧之一 $\widehat{ab}=l$. 取这个弧作为定理A的 $\boldsymbol{C}$. 该定理的条件是满足了的: $\boldsymbol{C}$ 是凸曲线而且有常曲线 $k_0\geqslant k(s)$. 于是 $d=\overline{ab}\leqslant\boldsymbol{C}'$ 的端点的距离 $=0$. 但在



$l<2\pi/k_0$ 的假设下, a, b 不能重合, $\overline{ab}>0$.故那样的曲线 $\boldsymbol{C}'$ 不存在. 这就证明了半径为 $1/k_0$ 的圆的最小性质.

4. 四顶定理

在平面上取两条简单闭凸线 C_1, C_2, 它们有相同的周长 $L_1 = L_2 = L$. 在两曲线上各取任意点为弧长 s 的始点,则在两曲线的点之间建立了一宗一一对应关系. C_1 和 C_2 的曲率 $k^1(s)$ 和 $k^2(s)$ 是 s 的连续周期函数, 周期为 L. 由于简单闭凸线的总曲率是 2π[1],

$$\int_0^L (k^1(s) - k^2(s))\,ds = \int_0^L k^1(s)ds - \int_0^L k^2(s)ds = 2\pi - 2\pi = 0.$$

由此可知,如果不是 $k^1(s) \equiv k^2(s)$,即 $C_1 \cong C_2$,则 $k^1(s) - k^2(s)$ 在某些地方一定要变号.

我们将证明: 除非两条曲线重合(这时 $k^1(s) - k^2(s)$ 不变号),否则在 $0 \leqslant s \leqslant L$ 中, $k^1(s) - k^2(s)$ 至少变号四次.

证明 现在假定 C_1, C_2 不重合, $k'(s) - k^2(s)$ 是一个周期函数, 所以如果变号的次数是有限的, 则这次数必是偶数. 但由 $\int (k^1(s) - k^2(s))ds = 0$,可知变号次数$>0$, 故只须证明不可能只有两次变号.

假定恰好有两次变号,发生在 $s = 0$ 和 $s = s_0$,例如

$$0 \leqslant s \leqslant s_0 \text{ 时}, \quad k^1(s) \geqslant k^2(s), \tag{4.1}$$

$$s_0 \leqslant s \leqslant L \text{ 时}, \quad k^1(s) \leqslant k^2(s). \tag{4.2}$$

在定理A中,若取 $C_2(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$ 为 C,取 $C_2(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$ 为 C',由于 C_1 是简单闭凸线, 并根据 (4.1), 定理A的条件是满足的. 于是由 (1.4) 得

$$d' \geqslant d, \tag{4.3}$$

其中

$$d' = \overline{C_2(s_0)\,C_2(0)}, \quad d = \overline{C_1(s_0)\,C_1(0)}.$$

---

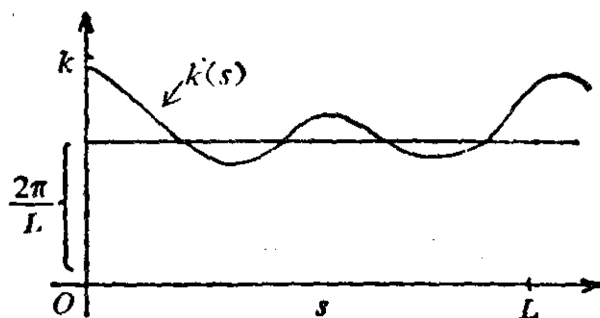
1) 证明见第 7 节. ——译者注.

另一方面，由 (4.2) 可知，若取 $C_2(s)$, $s_0 \leqslant s \leqslant L$ 为 C，取 $C_1(s)$, $s_0 \leqslant s \leqslant L$ 为 C'，定理A也适用；但这时由 (1.4) 得到和 (4.3) 恰好相反的不等式

$$d \geqslant d'. \tag{4.3'}$$

由 (4.3) 和 (4.3′) 可知 $d = d'$. 但这个等式成立的充要条件是在 (4.1) 和 (4.2) 中的等式都成立，即对于一切 s, $k^1(s) = k^2(s)$，因而根据引理 I, $C_1 \cong C_2$，与假设矛盾. 证毕.

已给任意长度为 L 的简单闭凸线 C，作半径为 $L/2\pi$ 的圆 R，并取 C 和 R 为上述定理的 C_1 和 C_2. 根据该定理，$k^1(s) - k^2(s) = k(s) - L/2\pi$ 至少变号四次. 但一个连续函数在两次变号之



间总有一个极值，故一条简单闭曲线的曲率至少有四个极值. 这个定理就叫做**四顶定理**.

5. 切线不连续转动的曲线

直到现在为止，我们的论断只适用于具有连续二阶导函数的曲线. 这种曲线我们将称之为 I 类曲线. 现在我们要把一部分结果推广到另一类曲线，这类曲线除在有限多个点外，有连续二阶导函数，而在那些例外点，一阶导函数可能有跳跃不连续性. 在这样的点 s，用 $\alpha(s)$ 表示曲线两边切线所作的**外角**. 这种曲线就称为 II 类曲线. 属于 II 类的一条曲线是有限多条 I 类曲线所构成的；它的球面象，作为定义，是构成它的那些 I 类曲线的球面象，加上一些大圆弧. 在两条 I 类曲线相接处，作为 I 类曲线的端点，它有不同球面象，连接这两个球面象的大圆的劣弧都要作为 II 类曲线

球面象的组成部分．这些大圆弧的长等于两条 I 类曲线在相接处两边切线所作的角 α．根据这个定义和第 1 节的结果，可知

$$u(s_1, s_2) \leqslant \int_{s_1}^{s_2} d\sigma = \text{球面象在 } s_1 \text{ 和 } s_2 \text{ 之间的长}. \tag{5.1}$$

若 $\int_{s_1}^{s_2} d\sigma \leqslant \pi$，(5.1) 中等式对于而且只对于切线单调（但不一定连续）转动的平面曲线成立．球面象的长可以写成

$$\int_{s_1}^{s_2} d\sigma = \int_{s_1}^{s_2} k(s) ds + \sum_{s_1 < s < s_2} \alpha(s), \tag{5.2}$$

其中 $\sum \alpha(s)$ 表示 s_1 和 s_2 之间，在一切 $k(s)$ 的不连续点，两边切线所作外角的总和．由 (5.1) 和 (5.2) 就得定理 A 的下面的推广：

定理 A′　若 II 类曲线 C 和 C' 的长度相等，而且在一切连续点，$k(s) \geqslant k'(s)$，在一切不连续点，$\alpha(s) \geqslant \alpha'(s)$，此外，若 C 和连接它的端点的弦一起构成简单闭凸线，则

$$d' \geqslant d, \tag{5.3}$$

其中 d 和 d' 依次是 C 和 C' 端点之间的距离，不等式中等号成立的充要条件是 $k(s) \equiv k'(s)$，$\alpha(s) \equiv \alpha'(s)$．

我们将应用定理 A′ 来证明一个重要引理．设 G 和 G' 为三维空间中的两个隅[1]．它们各有 n 个面，依次用 F_ν 和 F'_ν 表示，$\nu = 1, 2, \cdots, n$；用 φ_ν 和 φ'_ν 依次表示 F_ν 和 F'_ν 的面角．用 $l_\nu(l'_\nu)$ 表示 F_ν 和 $F_{\nu+1}$ (F'_ν 和 F'_ν) 两面的交线，$\nu = 1, 2, \cdots, n$（规定 $F_{n+1} = F_1$），它们是 $G(G')$ 的棱；设 $l_\nu(l'_\nu)$ 上的两面角是 $\alpha_\nu(\alpha'_\nu)$．设 O 和 O′ 依次为 G 和 G' 的顶点．

引理 II　设 G 和 G' 满足下列条件：

(a) $\nu = 1, 2, \cdots, n-1$ 时，$\varphi_\nu = \varphi'_\nu$；

(b) $\nu = 2, 3, \cdots, n-1$ 时，$\alpha'_\nu \geqslant \alpha_\nu$；

(c) G 是凸的，即每条直线和它的面至多交于两点[2]；

则

$$\varphi'_n \geqslant \varphi_n,$$

---

1) 隅(corner)的定义见下文．——译者注

2) 假定直线不在任何一个面上．——译者注

其中等式成立的充要条件是 (b) 中的诸等式成立.

证明 作平面 P 和 G 的一切棱相交，但不经过 O;用 A_ν 表示 P 和 l_ν 的交点，$\nu = 1,2,\cdots,n$. 在 G' 的棱 l'_ν 上取 A'_ν 点，使 $\overline{O'A'_\nu} = \overline{OA_\nu}, \nu = 1,2,\cdots,n$.

用 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}'$ 依次表示以 A_ν 和 A'_ν 为顶点的多边形，它们的边依次是连接 A_ν 和 $A_{\nu+1}$ 以及 A'_ν 和 $A'_{\nu+1}$ 的直线段，$\nu=1,2,\cdots,n$.

由 (a) 和我们的作图法，可知三角形 $A_\nu OA_{\nu+1}$ 和 $A'_\nu O'A'_{\nu+1}$ 全等，因而 $\overline{A_\nu A_{\nu+1}} = \overline{A'_\nu A'_{\nu+1}}$. 根据初等三角学，由(b)可知 $\boldsymbol{C}'$ 在 A'_ν 的内角 $\geqslant \boldsymbol{C}$ 在 A_ν 的内角，$\nu = 2,3,\cdots,n-1$. 由 (c) 可知 $\boldsymbol{C}$ 是凸多边形，即折线 $A_1A_2\cdots A_n$ 以及它两个端点的联线 A_nA_1 在一起构成简单闭凸线. 把这条折线和折线 $A'_1A'_2\cdots A'_n$ 看作定理 A′ 中的 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}'$，就得

$$\overline{A'_nA'_1} \geqslant \overline{A_nA_1}. \tag{5.4}$$

由此，再根据三角学，就得

$$\varphi'_n = \sphericalangle A'_nO'A'_1 \geqslant \sphericalangle A_nOA_1 = \varphi_n,$$

其中等号成立的充要条件是 $\alpha_\nu = \alpha'_\nu$, $\nu = 2,3,\cdots,n-1$，即 $G \cong G'$. 证毕[1].

设 G, G' 为两个凸隅，各有 n 面，而且 $\varphi_\nu = \varphi'_\nu$, $\nu = 1,2,\cdots,n$. 把 G 的棱 l_ν 分为三组:

(a) 组: $\alpha_\kappa > \alpha'_\kappa$ 的 l_κ,

(b) 组: $\alpha_\lambda < \alpha'_\lambda$ 的 l_λ,

(c) 组: $\alpha_\mu = \alpha'_\mu$ 的 l_μ,

作函数 $I(\nu)$，定义如下:

若 l_ν 属于 (a)，则 $I(\nu) = 1$,

---

1) 原证明有较多讹错，译时作了订正. ——译者注

若 l_ν 属于 (b),则 $I(\nu)=-1$,

若 l_ν 属于 (c),则 $I(\nu)=0$.

当 ν 逐个取 $1,2,\cdots,n-1,n,1$ 诸值时,$I(\nu)$ 变号的次数叫做 (G,G') 的指数,用 i 表示. 显然 i 是偶数.

引理 III 除非 $G\cong G'$, $i\geqslant 4$.

证明 由于 i 是正偶数,我们只须证明 $i=0$ 或 $i=2$ 时, $G\cong G'$.

(i) $i=0$ 表明 (a) 或 (b) 组是空集. 若 (a) 是空集, 引理 II 断定 $\varphi'_n\geqslant\varphi_n$, 其中等号成立的充要条件是 (b) 也是空集. 但根据假设, $\varphi'_n=\varphi_n$, 故 (b) 也是空集. 同样, 若 (b) 是空集,则 (a) 也是空集. 但一切棱 l_ν 属于 (c) 组时, $G\cong G'$.

(ii) $i=2$ 表明: 可以假定, 对于介乎 1 和 n 之间某个整数 m,

$$\nu=1,2,\cdots,m \text{ 时}, \ \alpha'_\nu\geqslant\alpha_\nu; \tag{5.5}$$

$$\nu=m+1,m+2,\cdots,n \text{ 时}, \ \alpha'_\nu\leqslant\alpha_\nu. \tag{5.6}$$

把 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 诸棱所构成的隅作为引理 II 中的 G,而 $l'_1, l'_2,\cdots,l'_m$ 所构成的隅作为 G',则根据该引理,

$$\measuredangle l'_1l'_m\geqslant\measuredangle l_1l_m, \tag{5.7}$$

其中 $\measuredangle l'_1l'_m$ 和 $\measuredangle l_1l_m$ 依次表示 l'_1 与 l'_m 和 l_1 与 l_m 所作的角.

另一方面,把 $l_{m+1},l_{m+2},\cdots,l_n$ 所构成的隅作为引理 II 中的 G',而 $l'_{m+1},l'_{m+2},\cdots l'_n$ 所构成的隅作为其中的 G,则按该定理,

$$\measuredangle l_1l_m\geqslant\measuredangle l'_1l'_m. \tag{5.8}$$

除非 (5.7) 和 (5.8) 中的等号成立, 它们是不相容的. 但若 (5.7),(5.8) 中的等号成立,两款中的 G 和 G' 必然分别全等. 这表明本引理中的 G 和 G' 也全等. 证毕.

引理 III 对于证明柯西关于凸多面形的刚性的著名定理是重要的. 这定理是: 已给两个凸多面形 P_1 和 P_2, 它们的面之间有一一对应关系, 对应的面全等, 而且按相同的次序相接, 则对应的两面角相等,即 P_1, P_2 全等.

证明 考虑 P_1 的两组棱:

(a) 其两面角$>P_2$的对应棱的两面角;

(b) 其两面角$<P_2$的对应棱的两面角.

从P_1的一个内点把(a)组的棱连同这些棱的端点作为顶点投影到以该内点为中心的幺球面S上,就得到一个网络Q,其中的棱分成两组,一组对应于(a),一组对应于(b). 若这两组是空集,则Q也是空的.

根据第一章的第12节,当一个非空网络的棱分为两个非空组时,Q的顶点中,至少有两个的级数$i<4$. 但根据引理III,在每个顶点,$i \geqslant 4$. 故级数<4的顶点不存在. 由这个矛盾可知,(a)和(b)两组中至少有一个是空集. 但由P_1, P_2的对称性,可以看出,若把P_1, P_2的地位对调,另一组也是空集,故P_1和P_2的对应两面角都相等. 证毕.

6. 四顶定理的黑尔格洛茨证明

我们现在叙述由黑尔格洛茨(Herglotz)给出的关于四顶定理的一个较简短的证明.

我们首先不加证明地叙述实变函数论中一个初等引理.

引理 IV 若连续函数在(a, b)节中没有极值,则它在该节中是单调的.

现设简单闭凸线$\boldsymbol{C}$在一个直角坐标系里用$(x(s), y(s))$, $0 \leqslant s \leqslant L$表示,其中$L$是周长.

用$\theta(s)$表示在s的切线和x轴所作的角,则

$$\dot{x} = \cos\theta, \quad \dot{y} = \sin\theta.$$

微分第一式并把第二式代入,则因$\dot{\theta} = k$,得

$$\ddot{x} = -\dot{y}k.$$

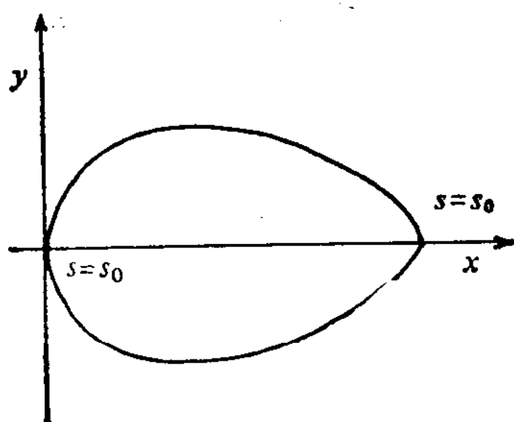
这式表明,$\dot{y}k$是连续周期函数$\dot{x}$的导函数,故它在周期上的积分是零:

$$\int_0^L \dot{y}k\,ds = [-\dot{x}]_0^L = 0. \qquad (6.1)$$

现在假设$k(s)$除在$s=0$有极小值和在$s=s_0$有极大值外,

没有其他极值．选择坐标系，使 x 轴经过 $(x(0),y(0))$ 和 $(x(s_0),y(s_0))$．由于 **C** 是凸的，x 轴和它没有其它交点．因此，可以假设当 $0<x<s_0$ 时，$y(s)>0$，当 $s_0<s<L$ 时，$y(s)<0$．此外，根据引理 IV，从 $s=0$ 到 $s=s_0$，$k(s)$ 是单调非减的，而从 $s=s_0$ 到 $s=L$，它是单调非增的．根据第二中值定理，必有 ξ_1，$0<\xi_1<s_0$ 使

$$\int_0^{s_0} k\dot{y}ds = k(0)\int_0^{\xi_1}\dot{y}ds + k(s_0)\int_{\xi_1}^{s_0}\dot{y}ds$$
$$= k(0)y(\xi_1) + k(s_0)[y(s_0)-y(\xi_1)]$$
$$= [k(0)-k(s_0)]y(\xi_1).$$



同样，又必有 ξ_2，$s_0<\xi_2<L$，使

$$\int_{s_0}^{L} k\dot{y}ds = k(s_0)\int_{s_0}^{\xi_2}\dot{y}ds + k(L)\int_{\xi_2}^{L}\dot{y}ds$$
$$= k(s_0)y(\xi_2) + k(L)[y(L)-y(\xi_2)]$$
$$= [k(s_0)-k(L)]y(\xi_2) = [k(s_0)-k(0)]y(\xi_2).$$

把最后两结果相加，就得

$$\int_0^L K\dot{y}ds = [k(0)-k(s_0)][y(\xi_1)-y(\xi_2)], \qquad (6.2)$$

而根据 (6.1)，最后一式是零．但 (6.2) 右边第一因子不等于零，除非 $\max k(s)=\min k(s)$，即 $k(s)$ 是常数．按照 ξ_1 和 ξ_2 的选择，第二因子总是 >0．故它们之积不可能是零．于是 $k(s)\neq$ 常数和只有两个极值的假设之间产生矛盾．　　证毕．

四顶定理对于一切简单闭曲线成立，但我们不去证明这个推

广.

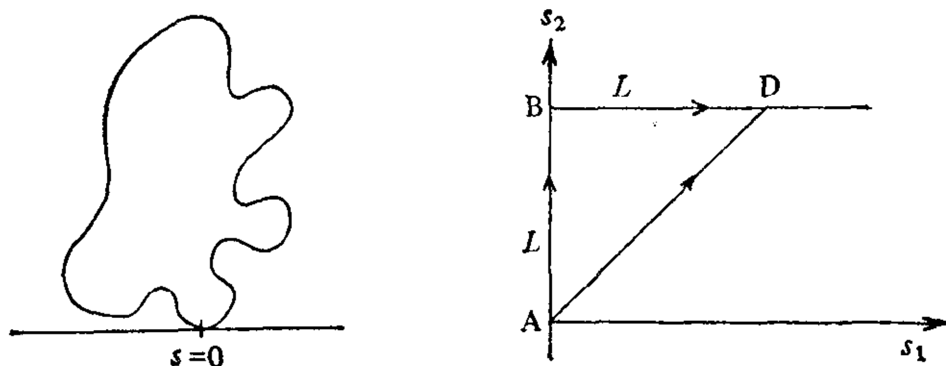
7. 简单闭曲线的总曲率

在第 4 节里,我们曾用到了简单闭凸线的总曲率等于 2π 的事实. 现在我们将证明一个更一般的定理: 若简单闭曲线 $\boldsymbol{C}$ 是正向的(即它所包围的域总在切线左侧),则它的**总曲率**

$$\int_0^L k_1 ds = \int_{s=0}^{s=L} d\theta = 2\pi. \tag{7.1}$$

其中 k_1 是 $\boldsymbol{C}$ 的有向曲率, θ 是它的切线和 x 轴所作的角.

证明 对于 $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant L$, 用 $V(s_1, s_2)$ 表示由 $\boldsymbol{C}(s_1)$ 到 $\boldsymbol{C}(s_2)$ 的矢量的辐角. 由于 $\boldsymbol{C}$ 没有多重点,它的切矢又是连续的,在 $V(s_1, s_2)$ 的定义域的闭包上, $V(s_1, s_2)$ 是连续的. 取 $\boldsymbol{C}$ 的一条切线, 使 $\boldsymbol{C}$ 除切点外整个在切线上方, 并取一个切点为 $s=0$. 由于 $\boldsymbol{C}$ 是正向的,在 $\boldsymbol{C}(s)$,切线方向如附图所示.



在右图中的三角形上, $V(s_1, s_2)$ 是确定而连续的, 由于连续矢场的辐角绕一个闭路的总变化是零,可知

$$\int_{s=0}^{s=L} d\theta = \int_{AD} d\theta = \int_{AB} d\theta + \int_{BD} d\theta,$$

其中 A, B, D 依次表示 $(s_1, s) = (0,0), (0, L), (L, L)$. 由于曲线 $\boldsymbol{C}$ 在 $\boldsymbol{C}(0)$ 的切线和 x 轴方向一致, $0 \leqslant V(0, s) \leqslant \pi$,因而当 s 由 0 变到 L 时, $\int_{AB} d\theta = \pi$. 同样可以看出 $\int_{BD} d\theta = \pi$. 相加, 就得到 (7.1).

8. 一般闭曲线的总曲率

由 (7.1) 可知，对于平面闭曲线，$\int_0^L k ds = \int_0^L |k_1| ds \geqslant \int_0^L k_1 ds = 2\pi$. 现在我们要证明，对于一切闭曲线，不等式

$$\int_0^L k ds \geqslant 2\pi \tag{8.1}$$

成立，即任意闭曲线的总曲率$\geqslant 2\pi$.

已给任意周长为 L 的 I 类曲线 $(x(s), y(s), z(s))$, $0 \leqslant s \leqslant L$，考虑它的球面象 $\boldsymbol{S}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s))$, $0 \leqslant s \leqslant l$；$\boldsymbol{S}(s)$ 是可求长的球面闭曲线. 此外，由于 x, y, z 是 s 的周期函数，周期等于 L，

$$\int_0^L \boldsymbol{S}(s) ds = \int_0^L (\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s)) ds = 0. \tag{8.2}$$

引理 V 在 m 维空间里，已给 k 个矢量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_k$，满足

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{C}, \tag{8.3}$$

其中 a_i 是正数，则可以从所给 k 个矢量中选出 n 个 $\boldsymbol{X}_{i_1}, \boldsymbol{X}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{X}_{i_n}$，和 n 个正数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，使得

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{X}_{i_j} = \sum_{j=1}^{k} a_j \boldsymbol{X}_j, \quad \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{k} a_j,$$

而且

$$n \leqslant m + 1. \tag{8.4}$$

证明 我们将通过对 k 的归纳法来证明引理 V. 当 $k = 1$ 时，引理成立. 假定引理 V 对于一切 $k \leqslant k_0$ 成立，我们要证明它对于 $k = k_0 + 1$ 也成立.

若 $k_0 \leqslant m$，则因 $n = k_0 + 1$ 满足 (8.4)，只须令 $\boldsymbol{X}_{i_j} = \boldsymbol{X}_j$, $b_j = a_j$, $j = 1, \cdots, k_0 + 1$，引理就自然得到满足.

若 $k_0 > m$，我们考虑含 $k_0 + 1$ 个未知数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k_0+1}$ 的 $m + 1$ 个齐次方程所构成的方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k_0+1} \lambda_i \boldsymbol{X}_i = 0, \\ \sum \lambda_i = 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

由于未知数个数 $k_0 + 1$ 大于方程个数 $m + 1$，方程组总有非平凡解 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k_0+1}$. 在这些 λ 中，有一些是正的，其余是非正的. 设

$$i=1,2,\cdots,\mu \text{ 时}, \lambda_i > 0; i=\mu+1,\cdots,k_0+1 \text{ 时}, \lambda_i \leqslant 0.$$

在 a_j/λ_j, $j = 1,2,\cdots,\mu$ 中，设最小的一个是 $a_\nu/\lambda_\nu = t$，则

$$0 < t = a_\nu/\lambda_\nu \leqslant a_j/\lambda_j, \ j = 1,2,\cdots,\mu. \tag{8.6}$$

我们令

$$a_i' = a_i - \lambda_i t, \ i = 1,2,\cdots,k,$$

则根据 (8.6)，

$$a_\nu' = a_\nu - \lambda_\nu t = 0,$$

$$a_j' = a_j - \lambda_j t = 0, \ j = 1,2,\cdots,\mu,$$

而由于当 $j = \mu + 1,\cdots,k_0 + 1$ 时，$\lambda_j \leqslant 0$，

$$a_j' = a_j - \lambda_j t > 0, \ j = \mu + 1,\cdots,k_0 + 1.$$

用 t 乘 (8.5) 中第一式，并把它从 (8.5) 减去，就得

$$\sum_{i=1}^{k_0+1} a_i' \boldsymbol{X}_i = \mathbf{C}, \tag{8.7}$$

又从 (8.5) 的第二式可知

$$\sum_{i=1}^{k_0+1} a_i = \sum_{i=1}^{k_0+1} a_i'. \tag{8.8}$$

在非负数 a_i' 中，我们选出其中具有正值的，则由于 $a_\nu' = 0$，具有正值的 a_i' 的个数不大于 k_0. 但若从所有 a_i' 中去掉其中等于零的，(8.7) 和 (8.8) 不变. 于是我们已在原有的 k_0+1 个矢量中选到了 $n \leqslant k_0$ 个，并选到了 n 个相应的正系数，使得这 n 个矢的线性组合 $= \sum_{i=1}^{k_0+1} a_i \boldsymbol{X}_i$，而且系数之和 $= \sum_{i=1}^{k_0+1} a_i$. 这样就把 $k = k_0 + 1$ 的情况归结为 $k = k_0$ 的情况，而根据假设，$k = k_0$ 时，引理 V 是成立的. 证毕.

根据(8.2)以及黎曼积分的定义可知：对于任意已给的 $\varepsilon>0$，总有一个正整数 N，使得

$$\left|\sum_{\nu=1}^{N}\frac{L}{N}\boldsymbol{S}\left(\frac{\nu L}{N}\right)\right|<\varepsilon. \tag{8.9}$$

因此，根据引理V的特款 $m=3$，可以找到 $n\leqslant 4$ 个点 $\boldsymbol{S}\left(\frac{\nu_i L}{N}\right)$ 和 n 个正数 $b_i, i=1,\cdots,n$，使

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{L}{N}\boldsymbol{S}\left(\frac{\nu L}{N}\right)=\sum_{\nu=1}^{n}b_i\boldsymbol{S}\left(\frac{\nu_i L}{N}\right),$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{L}{N}=L=\sum_{i=1}^{n}b_i.$$

令 ε 取一序列趋于零的值，则有与之相对应的序列 N_ε，$n(\varepsilon)\leqslant 4$，$b_i(\varepsilon)$，$\nu_i(\varepsilon)$，满足

$$\left|\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}b_i(\varepsilon)\mathrm{S}\left(\frac{\nu_i(\varepsilon)L}{N(\varepsilon)}\right)\right|<\varepsilon,\quad \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}b_i(\varepsilon)=L, \tag{8.10}$$

从上述 ε 值的序列中，选一个子序列，使得 $\varepsilon\to 0$ 时，以下诸极限存在：

$$\lim n(\varepsilon)=n;$$

$$\lim\frac{\nu_i(\varepsilon)L}{N(\varepsilon)}=s_i,\quad i=1,\cdots,n;$$

$$\lim b_i(\varepsilon)=b_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

由有限维空间的局部紧性，这样的子序列是存在的．取(8.10)的极限，就得

$$\sum_{i=1}^{n}b_i\boldsymbol{S}(s_i)=0,\ \sum_{i=1}^{n}b_i=L. \tag{8.11}$$

我们引进记号 $\boldsymbol{S}(s_i)=\boldsymbol{S}_i$, $i=1,\cdots,n$．根据大圆的劣弧的极小性质，可见

$$l=\text{球面象 } \boldsymbol{S}(s) \text{ 的长}\geqslant\sum_{i=1}^{n}|\widehat{\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_{i+1}}|\ (\boldsymbol{S}_{n+1}=\boldsymbol{S}), \tag{8.12}$$

其中 $|\widehat{\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j}|$ 表示连接 $\boldsymbol{S}_i$ 和 $\boldsymbol{S}_j$ 的劣弧 $\widehat{\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j}$ 之长．我们要证明，在

弧折线 $S_1\cdots S_nS_1$ 上有两个对极点（即幺球面一条直径的两个端点）.

两点 S 和 S' 为对极点的充要条件是它们满足如下的关系:

$$bS+b'S'=0,\ b>0,\ b'>0. \tag{8.13}$$

我们分三种情况讨论.

(a) $n=2$.

这时由 (8.11) 和 (8.13) 可知 S_1 和 S_2 是对极点.

(b) $n=3$.

这时由 (8.11) 可知 S_1, S_2, S_3 三点在 $\widehat{S_1S_2}$,$\widehat{S_2S_3}$,$\widehat{S_3S_1}$ 所构成的大圆上,因而 S_1 的对极点在 S_2S_3 上,

(c) $n=4$.

这时我们令

$$b_{12}=|b_1S_1+b_2S_2|,\ b_{34}=|b_3S_3+b_4S_4|.$$

($|X|$ 表示 X 和幺球心 O 的距离.)若 $b_{12}=0$ (或 $b_{34}=0$), S_1 和 S_2 (或 S_3 和 S_4) 满足象 (8.13) 那样的关系,因而是对极点. 若 b_{12}, $b_{34}>0$,令

$$S_{12}=\frac{1}{b_{12}}(b_1S_1+b_2S_2),\quad S_{34}=\frac{1}{b_{34}}(b_3S_3+b_4S_4), \tag{8.14}$$

代入 (8.11),得

$$b_{12}S_{12}+b_{34}S_{34}=0.$$

根据 (8.13), 可知 S_{12} 和 S_{34} 是对极点. 于是根据 (8.14), S_{12} 在 $\widehat{S_1S_2}$ 上, S_{34} 在 $\widehat{S_3S_4}$ 上.

这就证明了: 在弧折线 $S_1\cdots S_nS_1$ 上有两个对极点.

于是根据大圆的劣弧的极小性质以及 (8.12),可知

$$2\pi=|SS'|+|S'S|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\widehat{S_iS_{i+1}}|\leqslant l. \qquad \text{证毕.}$$

容易验证,对于平面凸线,而且只对于平面凸线,等号成立.

第　三　章

等周不等式及有关不等式

1. 等周不等式的施米特证明

本章讨论等周不等式及其有关的不等式. 等周不等式断定：一条简单闭曲线 C 所包围的面积≤具有相同周长的圆的面积；而且等号成立的充要条件是，C 是个圆.

等周不等式的几何证明很多，精巧和简洁程度不同. 在解析证明中，最早的一个是胡尔维茨（Hurwitz）1901 年给出的，我们将稍迟加以叙述. 我们先介绍施米特的一个异常简单的证明(1939).

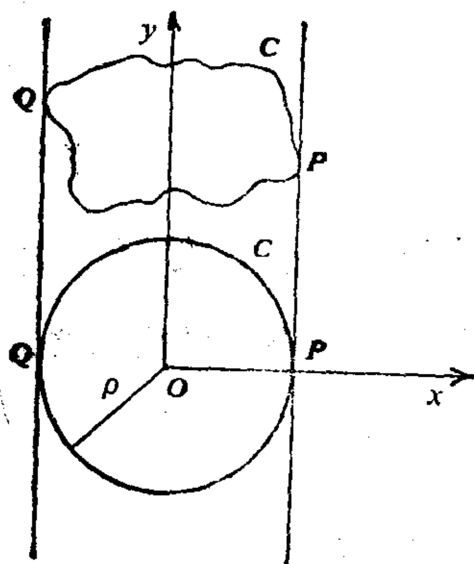
设 C 为具有连续切线的平面简单闭曲线，它与任意直线至多交于有限多个点. 用 A 表示 C 所包围的面积，L 表示周长. 用 $\{x(t), y(t)\}$，$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 作为 C 的参数表示，其中 $\{x(t_0), y(t_0)\} = \{x(t_1), y(t_1)\}$. 对于一切参数表示，公式

$$A = \int_{t_0}^{t_1} xy'dt \qquad (y' = dy/dt), \tag{1.1}$$

$$A = -\int_{t_0}^{t_1} yx'dt \quad (x' = dx/dt) \tag{1.2}$$

成立. 当 t 由 t_0 变到 t_1 时，从 $\{x(t_0), y(t_0)\}$ 量起，弧长 s 的变化为 L，即当 t 由 t_0 到 t_1 时，$\{x(t), y(t)\}$ 恰好沿 C 运行一次. 重要的是，要注意不同的 t 值可以对应于同一个 x 值或同一个 y 值.

如图所示，用两条纵切线把 C 包围在内，其切点为 P 和 Q. 作圆 $\bar{C}$ 也和这两条线相切. 设 $\bar{C}$ 的半径是 ρ，取 $\bar{C}$ 的中心为坐标原点. 设 s 为从 P 起沿反时针方向度量的 C 的弧长，$C = \{x(s), y(s)\}$；则对于某个 s_0，$Q = \{x(s_0), y(s_0)\}$，对于 $\bar{C}$，引进如下参数表示：$\bar{C} = \{\bar{x}(s), \bar{y}(s)\}$：



$$\begin{cases}\bar{x}(s)=x(s);\\ \bar{y}(s)=\sqrt{\rho^2-x^2(s)},\ 0\leqslant s\leqslant s_0,\\ \qquad =-\sqrt{\rho^2-x^2(s)},\ s_0\leqslant s\leqslant L.\end{cases}\tag{1.3}$$

这个参数表示是通过纵向投影，把 C 的 PQ 弧和 QP 弧上的点依次同 $\bar{C}$ 的 $\bar{P}\bar{Q}$ 弧和 $\bar{Q}\bar{P}$ 弧的点相对应；容易看出，当 s 从 0 变到 L 时，$\{\bar{x}(s),\ \bar{y}(s)\}$ 绕 $\bar{C}$ 一次。

把 (1.1) 应用于 C，(1.2) 应用于 C，则

$$A=\int_0^L xy'ds,\quad \bar{A}=\rho^2\pi=-\int_0^L \bar{y}\bar{x}'ds=-\int_0^L \bar{y}x'ds.$$

两式相加，得

$$A+\rho^2\pi=\int_0^L (xy'-\bar{y}x')ds\leqslant\int_0^L\sqrt{x^2+\bar{y}^2}\sqrt{x'^2+y'^2}ds,\tag{1.4}$$

其中右边不等式是对被积函数应用柯西不等式[1]的结果。但由于 s 是 C 的弧长，$x'^2+y'^2=1$；而根据 (1.3)，$x^2+\bar{y}^2=\rho^2$。故由 (1.4) 得

1) $\sum_{v=1}^{n} a_v b_v\leqslant\sqrt{\sum_{v=1}^{n} a_v^2\sum_{v=1}^{n} b_v^2}$，其中等号成立的充要条件是 a_v 和 b_v 成比例。这里是指其对应的积分不等式。——译者注

$$A+\rho^2\pi\leqslant\int_0^L \rho ds = L\rho. \tag{1.5}$$

应用算术中值和几何中值之间的不等式于A和$\rho^2\pi$，就由(1.5)得

$$2\sqrt{\rho^2\pi A}=2\rho\sqrt{\pi A}\leqslant A+\rho^2\pi\leqslant L\rho,$$

以ρ除两边，平方，得

$$4\pi A\leqslant L^2, \tag{1.6}$$

这就是著名的等周不等式。

现在来证明等式成立的充要条件是$\boldsymbol{C}$是圆。

假定(1.6)里的等式成立，则首先A和$\rho^2\pi$的算术中值和几何中值相等，这只有当 $A=\rho^2\pi$ 时才有可能。但y轴方向的选择是任意的，这表明$\boldsymbol{C}$在一切方向的宽度是相同的，即等于2ρ。

另一方面，若(1.6)中的等式成立，还必须有(1.4)中的等式成立，但这样$(x,\bar{y})$就必须和$(y',-x')$成比例：$x=ky'$，$\bar{y}=-kx'$。取平方和，得 $k^2=\rho^2$。因此，$x^2=\rho^2y'^2$。由于$\boldsymbol{C}$在一切方向的宽度都是2ρ，可以把$\bar{\boldsymbol{C}}$连同坐标系纵向平移，直至$\bar{\boldsymbol{C}}$和$\boldsymbol{C}$有共同的水平切线[1]。这以后，就可以在最后一式中把x和y对调，得 $y^2=\rho^2x'^2$。把两式相加，得

$$x^2+y^2=\rho^2(x'^2+y'^2)=\rho^2.$$

这表明$\boldsymbol{C}$是半径为ρ的圆。 证毕。

2. 到n维的推广

等周不等式到n维的推广就是一个闭曲面所包围的体积A和它的面积L之间的不等式[2]。由于我们预期其中等式对n维球而且只对n维球成立，又由于对于一个半径为r的n维球，$A=C_nr^n$，$L=nC_nr^{n-1}$（C_n 是n维幺球的体积），我们猜测不等式是

$$C_nn^nA^{n-1}\leqslant L^n. \tag{2.1}$$

我们将运用与上节类似的方法，对一类特殊的立体来证明

1）这句话是译者加的。——译者注

2）体积指n维体积，面积指$n-1$维面积。——译者注

(2.1)：这类立体在一个$(n-1)$维平面的垂直投影是一个$(n-1)$维球。

设S为一个n维立体的表面，它有连续转动的切面，而且它在$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$轴所构成的$(n-1)$维平面上的投影是一个$(n-1)$维球。我们还假定，每条平行于任意坐标轴的直线和$S$至多交于有限多个点。用$\cos\xi_v, v=1,2,\cdots,n$表示$S$在它任意点的法线的方向余弦。于是，在以上对$S$的假设下，容易证明立体的体积

$$A=\int_S x_v \cos\xi_v\, dS, \quad v=1,2,\cdots,n, \tag{2.2}$$

其中$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示S上的点，积分范围是整个曲面S。

选取一个n维球$\bar{S}$，它在$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$轴的平面投影和$S$重合。取$\bar{S}$的中心为坐标系原点，则

$$C_n\rho^n=\bar{A}=\int_S \bar{x}_n \cos\xi_n dS, \tag{2.3}$$

其中$\bar{A}$表示$\bar{S}$的体积，ρ表示它的半径。

把$v=1,2,\cdots,n-1$代入(2.2)，并把结果和(2.3)相加，得

$$(n-1)A+C_n\rho^n=\int_S (x_1\cos\xi_1+x_2\cos\xi_2+\cdots$$
$$+x_{n-1}\cos\xi_{n-1}+\bar{x}_n\cos\xi_n)dS.$$

对右边积分应用施瓦尔茨不等式[1]得

$$(n-1)A+C_n\rho^n\leqslant\int\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2+\bar{x}_n^2}$$
$$\cdot\sqrt{(\cos^2\xi_1+\cos^2\xi_2+\cdots\cos^2\xi_n)}dS=\int\sqrt{\rho^2}\,dS=\rho L. \tag{2.4}$$

由于n个数的算术中值$\geqslant$它们的几何中值，(2.4)左边

$$\geqslant n\sqrt[n]{C_nA^{n-1}\rho^n},$$

故

$$n\sqrt[n]{C_nA^{n-1}\rho^n}\leqslant\rho L.$$

1) $\int fg\,dt\leqslant\sqrt{\int f^2dt\cdot\int g^2dt}$，其中等式成立的充要条件是$f$和$g$成比例。——译者注

取两边 n 次方即得 (2.1). 采用类似二维情形的方法可以证明,当且仅当 S 是一个 n 维球面时,等式成立. 证毕.

3. 等周不等式的胡尔维茨证明

现在我们介绍胡尔维茨较早的关于二维情形等周不等式的证明. 我们采用 Hardy-Littlewood-Pólya 在 Inequalities 一书里的论述形式.

引理 I (维尔廷格尔 (Wirtinger) 不等式) 若 $f(t)$ 是具周期 2π 的连续函数,有连续的导函数 $f'(t)$*), 而且 $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$,则

$$\int_0^{2\pi} f'^2 dt \geqslant \int_0^{2\pi} f^2 dt, \tag{3.1}$$

其中等式成立的充要条件是 $f(t) = a\cos t + b\sin t$.

条件 $\int f(t)dt = 0$ 不是多余的, 因为否则我们可以通过加一个常数于 $f(t)$,使 (3.1) 左边不变而右边任意地大.

胡尔维茨在他原来的证明中利用了傅里叶 (Fourier) 级数理论: 即在 $f(t)$ 和 $f'(t)$ 都连续的条件下,后者的傅里叶级数可以对前者的傅里叶级数逐项微分得到:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \\ f'(t) &\sim \sum (nb_n \cos nt - na_n \sin nt). \end{aligned} \tag{3.2}$$

由于 $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$,根据假定, $a_0 = 0$.

对傅里叶展开式 (3.2) 应用 Parseval 公式,得

$$\int f^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

$$\int f'^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2).$$

故

---

*) 只须假定 $f'(t)$ 平方可积而且 $f(t)$ 可以表示为它的导函数的积分.

$$\int f'^2 dt - \int f^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2),$$

而右式总是$\geqslant 0$. 它等于 0 的充要条件是，对于一切 $n > 1$, $a_n = b_n = 0$;即 $f = a_1 \cos t + b_1 \sin t$. 证毕.

等周不等式的证明 设 C 为具有分段连续切线的简单闭线. 用 A 表示它所包围的面积，L 表示它的周长，可以令 $L = 2\pi$ 而不失普遍性.

选取直角坐标系的 y 轴经过曲线 C 的重心,即

$$\int_0^{2\pi} x ds = 0,$$

其中参数 s 是弧长. 根据第 1 节，有公式

$$A = \int x y' ds. \tag{1.1}$$

又因 $x'^2 + y'^2 = 1$,有

$$2\pi = \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2) ds. \tag{3.3}$$

以 2 乘 (1.1),并从 (3.3) 减去,得

$$\begin{aligned} 2(\pi - A) &= \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2 - 2xy') ds \\ &= \int_0^{2\pi} (x'^2 - x^2)\, ds + \int_0^{2\pi} (x - y')^2 ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

根据引理 I,右边第一项$\geqslant 0$; 由于第二项的被积函数是非负的,它也$\geqslant 0$. 故

$$2(\pi - A) \geqslant 0, \text{即 } A \leqslant \pi. \tag{3.5}$$

这就是: 具有周长 2π 的曲线 C 所包围的面积 $A \leqslant \pi =$ 具有周长 2π 的圆的面积. 若 (3.5) 中的等式成立,则一方面,引理 I 中的等号对 $f = x(s)$ 成立, 即 $x(s) = a \cos s + b \sin s$, 另一方面 $x - y' \equiv 0$,即 $y = a \sin s - b \cos s + C$. 容易看出,这是圆的参数表示式.

等周不等式的这个证明不如第一节的初等, 因为在引理 I 的证明中用到较深的傅里叶级数理论. 因此, 值得找一个关于引理

I 的浅易证明;第 1 节中的推演提示了这样一个证明*).

我们先指出：若 $f(t)$ 满足条件 $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$，则当 $\bar{f}(t) = f(t) + C$ 时，

$$\int_0^{2\pi} \bar{f}^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f^2 dt + 2\pi C^2. \tag{3.6}$$

现在设 $M \geqslant 0$ 表示 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} f(t)$，而 $m \leqslant 0$ 表示 $\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} f(t)$，则对于函数

$$x(t) = f(t) - \frac{M+m}{2},$$

$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} x(t) = -\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} x(t) = \dfrac{M-m}{2}$. 令 $\rho = \dfrac{M-m}{2}$，并假定 x 的极大值出现在 $t=0$ 时，而极小值出现在 $t=t_0$ 时，其中 $0 < t_0 < 2\pi$.

在 (x, y) 平面上作半径为 ρ、中心在原点的圆，并通过下面方程引进 t 作为它的参数

$$\bar{x}(t) = x(t),$$

$$\bar{y} = \begin{cases} \sqrt{\rho^2 - x^2(t)}, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ -\sqrt{\rho^2 - x^2(t)}, & t_0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

容易验证，当 t 由 0 变到 2π 时，点 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 绕圆一周.

为了简化，我们假定只有有限多个 t 值对应于同一个 $x(t)$ 值，这样，容易证明，圆的面积可用下面的公式确定：

$$\rho^2\pi = -\int_0^{2\pi} \bar{y}\bar{x}'\,dx. \tag{3.7}$$

对右边应用施瓦尔茨不等式，再引进记号

$$\int_0^{2\pi} x^2 dt = A, \quad \int_0^{2\pi} x'^2 dt = B,$$

得

*) 再一个证明见 Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities.

$$\rho^2\pi \leqslant \sqrt{\int \bar{y}^2 dt \int \bar{x}'^2 dt} = \sqrt{\int (\rho^2 - x^2) dt \int x'^2 dt}$$

$$= \sqrt{(2\pi\rho^2 - A)B},$$

以 $\sqrt{A}$ 乘两边，得

$$\rho^2\pi\sqrt{A} \leqslant \sqrt{A(2\pi\rho^2 - A)B}. \tag{3.8}$$

由于 $A(2\pi\rho^2 - A)$在 $A = \pi\rho^2$ 时有最大值，该式总 $\leqslant \pi^2\rho^4$. 因此，

$$\rho^2\pi\sqrt{A} \leqslant \sqrt{\pi^2\rho^4 B},$$

故

$$\sqrt{A} \leqslant \sqrt{B}，\text{即 } A \leqslant B，\text{或 } \int_0^{2\pi} x^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} x'^2 dt. \tag{3.9}$$

证毕.

现在讨论 (3.9) 中等号成立的情况. 首先，在应用施瓦尔茨不等式于 (3.7) 时，该不等式中的等号必须成立，因而

$$\bar{y} = k\bar{x}' = kx', \tag{3.10}$$

其中 k 是常数. 其次，$A(2\pi\rho^2 - A)$ 必须等于 $\pi^2\rho^4$，因而 $A = \pi\rho^2$，故

$$\int_0^{2\pi} \bar{y}^2 dt = \int_0^{2\pi} (\rho^2 - x^2) dt = 2\pi\rho^2 - A = \pi\rho^2.$$

但根据 (3.10)，

$$\int_0^{2\pi} \bar{y}^2 dt = \int_0^{2\pi} k^2 x'^2 dt = k^2 B.$$

由于 (3.9) 中等号成立，$B = A = \pi\rho^2$. 于是比较最后两式，就得 $k^2 = 1$. 取 (3.10) 的平方，并把 $\bar{y}^2 = \rho^2 - x^2$ 代入，就得到关于 x 的微分方程

$$x'^2 = \rho^2 - x^2，\text{故 } x = a\cos t + b\sin t,$$

其中 $a^2 + b^2 = \rho^2$. 这就是 (3.9) 中等式成立的充要条件.

把 $x(t)$ 作为 (3.6) 中的 $\bar{f}(t)$，把$-\dfrac{M+m}{2}$作为 C，则因 $f'(x)$

$=x'(t)$,不等式 (3.9) 用 f 和 f' 表示就是

$$\int_0^{2\pi} f^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2 dt - \left(\frac{M+m}{2}\right)^2 2\pi.$$

这个不等式比 (3.1) 略进一步.

4. 一类更一般的不等式

这个证明维尔廷格尔不等式的方法可以用来证明一个较一般的不等式.

设 $f(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上有连续导函数,而且

$$\max f(t) = f(0) = -\min f(t) = -f(0) = \rho.$$

设 a, b 两数满足 $a>0$, $b>1$,令 β 满足 $1/b+1/\beta=1$. 则

$$\left(\int_0^1 |f|^a dt\right)^{1/a} \leqslant C_{ab}\left(\int_0^1 |f'|^b dt\right)^{1/b}, \tag{4.1}$$

其中

$$C_{ab} = \frac{a}{4B(1/\beta+1,\ 1/a)}\left(\frac{\beta}{\beta+a}\right)^{1/a}\left(\frac{a}{\beta+a}\right)^{1/\beta}.$$

($B(p,q)$ 是 Beta 函数[1]). (4.1) 中的等式对于满足下面微分方程的函数 $f(t)$ 成立:

$$\frac{\rho^a a^b}{(4B\ (1/\beta+1,\ 1/a))^b}\left(\frac{a}{a+\beta}\right)^b |f'(t)|^b = \rho^a - |f(t)|^a. \tag{4.2}$$

证明 对于曲线

$$|x|^a + |y|^\beta = \rho^a, \tag{4.3}$$

引进参数表示

$$x = f(t);$$

$$y = \sqrt[\beta]{\rho^a - |f(t)|^a}, \quad 0\leqslant t\leqslant t_0;$$

$$y = -\sqrt[\beta]{\rho^a - |f(t)|^a}, \quad t_0\leqslant t\leqslant 1.$$

---

1) $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$.——译者注

曲线 (4.3) 包围的面积$=u\rho^{1+a/\beta}$, 其中 $u=4/aB(1/\beta+1,1/a)$.
根据公式 (1.2),曲线所包围的面积

$$u\rho^{1+a/\beta}=-\int_0^1 yx'dt. \tag{4.4}$$

引进记号

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^a dt\right)^{1/a}=A,\ \left(\int_0^1 |f'(t)|^b dt\right)^{1/b}=B.$$

应用赫耳德尔 (Hölder) 不等式[1]于 (4.4) 右边,就得

$$u\rho^{1+a/\beta}\leqslant\left(\int_0^1 y^\beta dt\right)^{1/\beta}\left(\int_0^1 x'^b dt\right)^{1/b}=(\rho^a-A^a)^{1/\beta}\cdot B. \tag{4.5}$$

以 A 乘 (4.5) 两边, 则由于因子 $(A^\beta(\rho^a-A^a))^{1/\beta}$ 的极大值是 $\rho^{1+a/\beta}(\beta/(\beta+a))^{1/a}(a/(\beta+a))^{1/\beta}$ (对应于 $A=\rho(\beta/(\beta+a))^{1/a}$), $Au\rho^{1+a/\beta}\leqslant\rho^{1+a/\beta}(\beta/(\beta+a))^{1/a}(a/(a+\beta))^{1/\beta}\cdot B$.
除以 $u\rho^{1+a/\beta}$,就得 (4.1).

(4.1) 中,等号成立的充要条件是:

(a) 在应用赫耳德尔不等式于 (4.4) 时, 该不等式中的等号成立;

(b) $A=\rho(\beta/(\beta+a))^{1/a}$.

由 (a) 可知

$$|y|^\beta=k|x'|^b, \tag{4.6}$$

其中 k 是常数.取 (4.6) 的积分,并利用 (b),可以求出 $k=\rho^{a-b}(a/(a+\beta))^b/u^b$. 把这个 k 的值代入 (4.6), 就得到微分方程 (4.2). 至于 (4.2) 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上有连续解, 其最大和最小值依次为 $+\rho$ 与 $-\rho$ 的证明,这里从略[*].

---

1) 若 $1/p+1/q=1$, 则 $\int f(t)g(t)dt\leqslant\left(\int f^p(t)dt\right)^{1/p}\cdot(g^q(t)dt)^{1/q}$, 其中等式成立的充要条件是 $f^p(t)$ 和 $g^q(t)$ 成比例. ——译者注

*) 参看 E. Schmidt, Über die Ungleichung welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet, *Math. Ann.*, **117**, 301—326(1940).

5. 三维等周不等式证明的完成

在本节里，作为三维空间等周不等式证明的补足[1]，我们在已给具有表面积 L 和体积 A 的一个任意立体的情况下，构造一个具有相同表面积而较大体积的回转体，或者与此等价构造，一个具有相同体积而较小表面积的回转体[*]。

我们假定本节里所讨论的曲面有连续导函数.

引理 II 对于每一个分段连续的函数 $D(t)$,

$$\int_0^T \sqrt{1 + D^2(t)}dt \geqslant \sqrt{T^2 + \left(\int_0^T Ddt\right)^2}, \qquad (5.1)$$

其中等号成立的充要条件是 $D(t)$ 为常数.

证明 若 $x(t)$, $y(t)$, $0 \leqslant t < T$, 为任意两个具有分段连续导函数 $x'(t) = f(t)$, $y'(t) = g(t)$ 的函数，连接 $(x(0), y(0))$, $(x(T), y(T))$ 两点的弧 $[x(t), y(t)]$ 是可求长的，它的长是

$$\int_0^T \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \int_0^T \sqrt{f^2 + g^2}\, dt.$$

连接两点的弦长是

$$\sqrt{(x(T) - x(0))^2 + (y(T) - y(0))^2}$$
$$= \sqrt{\left(\int_0^T f(t)dt\right)^2 + \left(\int_0^T g(t)dt\right)^2}.$$

故对于任意分段连续函数 f 和 g，不等式

$$\int_0^T \sqrt{f^2 + g^2}\, dt \geqslant \sqrt{\left(\int_0^T fdt\right)^2 + \left(\int_0^T gdt\right)^2} \qquad (5.2)$$

成立. 令 $f(t) = 1$, $g(t) = D(t)$, 就得到(5.1)作为(5.2)的特款.

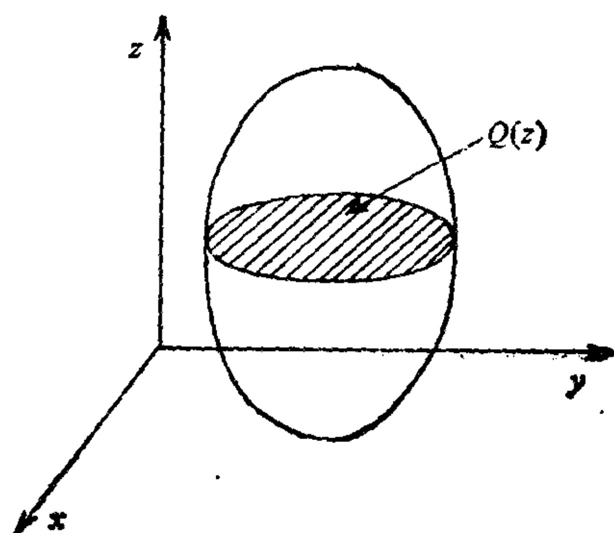
---

1) 在第二节里，我们证明 n 维等周不等式时，假定了 n 维体在某个 $n-1$ 维平面上的投影是 $n-1$ 维球，故该证明还很不完备. 在这里，我们将证明：已给三维空间任意立体 F，可以构造一个回转体 F'，其体积和 F 相同而表面积较小. 由于回转体在垂直于它的轴的平面上的投影是圆盘(二维球)，根据第二节的定理，在一切这样的回转体中，三维球的表面积最小，这样就完成了三维等周不等式的证明. ——译者注

*) 下面的证明是 H. A. 施瓦尔茨给出的.

现设已给一个立体，我们考虑平面 $z=$ 常数和立体的交集。用 σ 表示这个交集边界从某点量起的弧长，并取 z 和 σ 作为立体表面的参数*)。若用 $D(z,\sigma)$ 表示雅科比 (Jacobi) 行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,\sigma)}$，曲面的面积元素是

$$dL=\sqrt{1+D^2}\,dzd\sigma.$$



用 $Q(z)$ 表示高度为 z 的水平面和立体的交集的面积。由于 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,\sigma)}dzd\sigma$ 是面积元素在 x,y 平面上的投影，$\frac{dQ}{dz}=\int_0^{l(z)}Dd\sigma$，其中 $l(z)$ 是交集的周长。

在公式

$$L=\int dz\int_0^{l(z)}\sqrt{1+D^2}\,d\sigma$$

中，对积分 $\int\sqrt{1+D^2}\,d\sigma$ 应用引理 II，即得

$$L\geqslant\sqrt{l^2(z)+\left(\int_0^{l(z)}Dd\sigma\right)^2}dz=\int\sqrt{l^2(z)+\left(\frac{dQ}{dz}\right)^2}\,dz. \quad (5.3)$$

---

*) 我们假定，除两个支撑面外，立体表面没有水平切面，否则引进 z 和 σ 作为参数就会出现麻烦。

在这里，若D和σ无关，等式成立；当立体是回转体时，就出现这种情况.

已给具有表面积L和体积A的任意立体F，设它和任意水平平面$z=$常数的交集面积是$Q(z)$，作回转体F'，它和$z=$常数的交集是面积等于$Q(z)$、而圆心在z轴上的圆. 根据卡瓦利埃里(Cavalieri)原理[1]，$A'=A$. 由于F'是回转体，当把(5.3)应用于F'时，等号成立.

$$L=\int\sqrt{(l'(z))^2+\left(\frac{dQ}{dz}\right)^2}\,dz, \tag{5.3'}$$

其中$l'(z)$表示面积等于$Q(z)$的圆的周长(即

$$l'(z)=\sqrt{4\pi Q(z)}).$$

关于二维空间的等周不等式断定

$$l'(z)\leqslant l(z). \tag{5.4}$$

由(5.3)，(5.3')和(5.4)，得$L\geqslant L'$，其中等式成立的充要条件是F具有平行于z轴的回转对称轴.

证毕.

1) 若两个立体位于两个平行平面之间，而它们同这两个平面以及一切平行平面的截面积都分别相等，则它们的体积相等. ——译者注

第 四 章

初等的面积和体积概念

1. 矩形面积和矩体体积

在初等几何里，面积(体积)的定义有如下形式:

(i) 如果一个矩形(矩体[1]) 的边长是 1, l (1,1, l),它就叫做一个标准矩形(矩体),其面积(体积)是 l.

(ii) 若一个多边形(多面体) P 可以分解成有限多块，而这有限多块又可以拼成一个标准矩形(体) R，则它的面积(体积)等于 R.

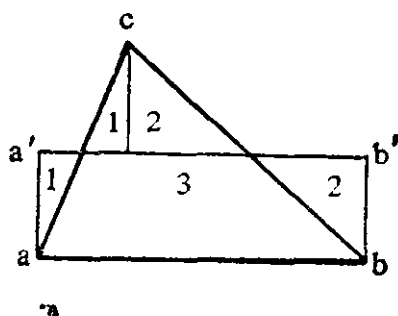
若这定义是能适用的,它必须是:

(a) 相容的;

(b) 可以用于较广泛的一类(最好是一切)多边形(多面体)P.

所谓 (i) 与 (ii) 相容的意思是: 若一个多边形可以分解并拼成标准矩形 R 和 R',则 $R \cong R'$. 这个相容性是可以证明的*)，例如利用若当测度理论.

在本章里，我们将研究上述定理可以适用于哪些点集. 我们



1) 即长方体. ——译者注

*) 系统论述见 D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 第四章.

的研究将从考察三角形面积和四面体体积公式的推导开始。

已给三角形 (abc)，用 h 表示它 ab 边上的高，l 表示 ab 边长，A 表示三角形面积，则

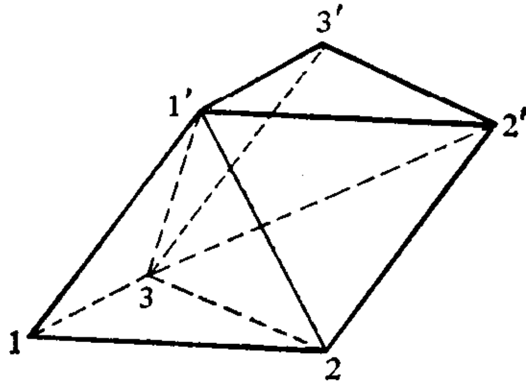
$$A=\frac{1}{2}hl. \tag{1.1}$$

证明 按附图把三角形分解并拼成边长为 l 和 $h/2$ 的矩形 (abb′a′). 若假定(这个假定将在第二节，引理 II 证明)任意矩形的面积等于其边长之积，则这个分解法已证明了 (1.1).

已给四面体 (1231′)，用 h 表示面 (123) 上的高，A 表示这个面的面积，V 表示四面体体积，则

$$V=\frac{1}{3}hA. \tag{1.2}$$

证明 作三角棱柱 (1231′2′3′)；假定(这个假定将在第 6 节定理 V 证明)棱柱体积 = 底面积乘高 = hA.



这个棱柱是三个四面体 (1231′), (1′232′), (1′2′3′3) 拼成的，这三个四面体中，每两个有全等的面以及在这两面上相等的高。例如 (1231′) 和 (1′232′) 有全等的面 (11′2) 和 (1′2′2) 及共同对顶点 3.

若假定

(iii) 同底而且等高的两个四面体有相同的体积，

那么 (1231′)，(1′232′) 和 (1′2′3′3) 三个四面体有相同的体积 = 棱柱体体积的三分之一 = $\frac{1}{3}hA$.

在这个证明中，除了假设 (i)，(ii) 外，还得添上 (iii)．因此，按照我们上面关于体积的定义，除非 (iii) 能够从 (i)，(ii) 推得，我们的证明是不能用的．高斯 (Gauss) 提出了能否从 (i)，(ii) 证明 (iii) 的问题，它长期成为几何中突出的未解决问题之一，最早解决它的是 M. Dehn，答案是否定的[*]．

2. 相抵多边形(多面体)

定义 已给两个多边形(多面体) A 和 B，若有多边形(多面体) A_i, B_i, $i = 1, 2, \cdots, n$，满足条件

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \sum_{i=1}^{n} B_i, \tag{2.1}$$

$$A_i \cong B_i, \ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.2}$$

而且当 $i \neq j$ 时，A_i 和 A_j，B_i 和 B_j 都没有公共内点，则 A, B 称为相抵的；用 $A \sim B$ 表示：

注记 已给一个点集 P，当 P 和一个标准矩形(矩体)等价时，而且只在这时，面积(体积)的初等定义适用于 P．在以下各节中，除非另有规定，“面积”和“体积”两个词都是在若当意义[1]下使用的，而且面积和体积的初等概念将用等价概念代替．

引理 I 相抵是可递概念：即由 $A \sim B$ 和 $B \sim C$ 可以推知 $A \sim C$．

证明 设已知 $A \sim B$, $B \sim C$，则存在着 A_i, B_i, $i = 1, 2, \cdots, m$，和 B'_j, C_j, $j = 1, 2, \cdots, n$，其中任意两个 A_i, B_i 或 B'_j, C_j 都没有公共内点，而且

$$A = \sum_{i=1}^{m} A_i, \quad B = \sum_{i=1}^{m} B_i,$$

$$B = \sum_{j=1}^{n} B'_j, \quad C = \sum_{j=1}^{n} C_j,$$

---

*) M. Dehn, *Math. Ann.*, **55**, 465--478(1902).

1) 一个点集的若当测度满足以下性质：(1) 它是非负实数(可以是∞)，空集测度为零；(2) 没有公共点的两个点集的测度之和等于其并集的测度．——译者注

$$A_i \cong B_i,\ i = 1,2,\cdots,m,$$
$$B'_j \cong C_j,\ j = 1,2,\cdots,n.$$

用 S_{ij} 表示 B_i 和 B'_j 的交集，$i = 1,2,\cdots,m$，$j = 1,2,\cdots,n$，由于 B_i 和 B'_j 本身是多边形(多面体)，S_{ij} 也是多边形(多面体)。S_{ij} 和 S_{kl} 的任何公共点都是 B_i，B_k，B'_j，B'_l 的公共点。但前两个同后两个多边形(多面体)只有当 $i = k$ 和 $j = l$ 时才有公共点，可见除非 $i = k$，$j = l$，否则 S_{ij} 和 S_{kl} 没有公共内点。

由 S_{ij} 的定义可知

$$\begin{cases} B_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}, & i = 1,2,\cdots,m; \\ B'_j = \sum_{i=1}^{m} B_{ij}, & j = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{2.3}$$

于是，由于 $A_i \cong B_i$，$C_j \cong B'_j$，(2.3) 中 B_i 的重分可以导致 A_i 的重分，B_j 的重分可以导致 C_j 的重分，即存在着 R_{ij} 和 T_{ij}，$i = 1, 2,\cdots,m$，$j = 1,2,\cdots,n$，满足

$$R_{ij} \cong S_{ij} \cong T_{ij}, \tag{2.4}$$

$$A_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij}, \qquad i = 1,2,\cdots,m, \tag{2.5}$$

$$C_j = \sum_{i=1}^{m} T_{ij}, \qquad j = 1,2,\cdots,n. \tag{2.6}$$

把 (2.5) 和 (2.6) 依次对一切 i 和一切 j 取和，得

$$\begin{cases} A = \sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} R_{ij}, \\ C = \sum_{j=1}^{n} C_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} T_{ij}. \end{cases} \tag{2.7}$$

等式 (2.7) 表明，A 和 C 可以依次分解为有限多个多边形(多面体) R_{ij} 和 T_{ij}，其中 R_{ij} 和 T_{ij} 全等，而且任意两个 R_{ij} 或 T_{ij} 都没有公共内点(这由 S_{ij} 的类似性质可以推知)。故 $A \sim C$。

由相抵的可递性可以看出，我们可以把相抵的一切多边形(多面体)划归一类，从而把一切多边形(多面体)分为相抵类。

定理 I 具有相同面积的一切多边形属于同一个相抵类.

系理 (i) 与 (ii) 在初等意义下确定每一个多边形的面积.

在证明定理 I 之前,我们先证明下面的

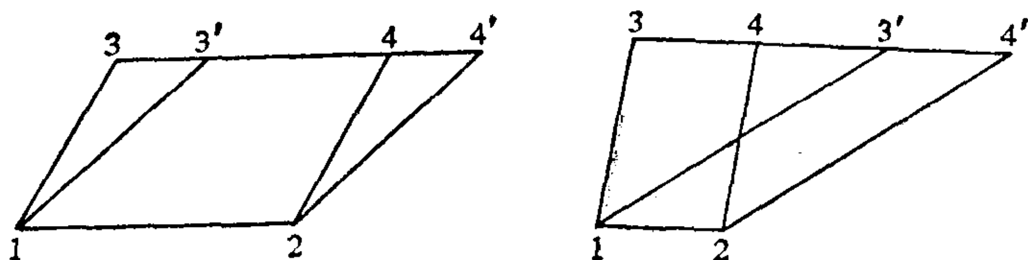
引理 II 每一个多边形和一个标准矩形相抵.

引理 II 的证明 每一个多边形都是有限多个三角形的并集.由于几个标准矩形可以连接成一个标准矩形,我们只须对三角形证明引理 II. 证明分四步.

a) 每一个高等于 a,底等于 b 的三角形和一个高等于 $a/2$,底等于 b 的平行四边形等价.

通过公式 (1.1) 的证明中的作图,这个结论可以得到证实.

b) 有一边相同而且在这边上的高也相同的两个平行四边形相抵.



设这两个平行四边形是 (1234) 和 (123'4').由于它们在 (12) 上的高相同,3,4,3',4' 在同一条直线上,我们分两种情况讨论.

(A) 3'在闭节(34)上,则(1234)=(133')+(13'42),(123'4')=(244') + (13'42). 但 (133')≅(244'),故 (1234)~(123'4').

(B) 3' 在 (3,4) 之外. 在经过 3 和 4' 的直线上,取一序列的点 $3^{(1)}, 3^{(2)}, \cdots\cdots 3^{(n)}$,使得 $3^{(i+1)}3^{(i)}=3'4'$,其中 $3^{(1)}$ 和 3' 重合而 $3^{(n)}$ 在闭节 (3,4) 上. 根据阿基米德 (Archimedes) 公理[1],这样的序列是存在的. 根据 (A),对于 $i=2,3,\cdots,n-1$, $(123^{(i)}3^{(i+1)}) \sim (123^{(i-1)}3^{(i)})$, 又 $(123^{(n-1)}3^{(n)}) \sim (123'4')$, $(123^{(1)}3^{(2)}) \sim (1234)$.

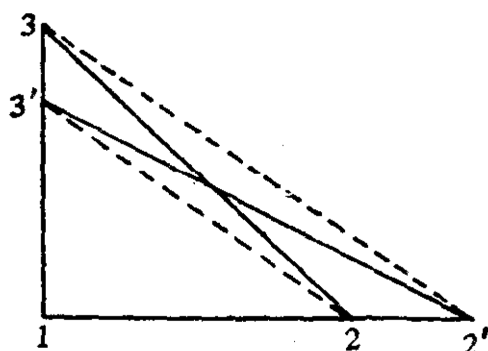
---

1) 若 AB 和 CD 为任意两个线段,则在直线 AB 上有点序列 $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots A^{(n)}$,其中 $A^{(1)}$ 和 A 重合, $A^{(1)}A^{(2)}, \cdots A^{(n-1)}A^{(n)}$ 都全等,而 B 则在 $A^{(n-1)}$ 和 $A^{(n)}$ 之间(包括 B 和 $A^{(n)}$ 重合的情况). ——译者注

由于相抵是可递的，$(1234)\sim(123'4')$.

c) 根据 a)，同底同高的两个三角形分别和两个彼此同底同高的平行四边形相抵；而根据 b)，这两个平行四边形相抵. 故按相抵的可递性，所给两个三角形相抵.

d) 已给直角三角形 (123)，在半线 $(1,3)$ 上取 $3'$ 点，使由 1 到 $3'$ 的距离是两个单位(长)，假定线段 $\{1,3\}\geqslant\{1,3'\}$. (若 $\{1,3'\}\geqslant\{1,3\}$，证明完全相同.) 在半线 $(1,2)$ 上取 $2'$ 点，使经过 3 和 $2'$ 的直线平行于经过 $3'$ 和 2 的直线. 于是



$$(12'3')=(123')+(22'3'), \tag{2.8}$$

$$(123)=(123')+(233'). \tag{2.9}$$

三角形 $(22'3)$ 和 $(233')$ 有相同的底 $(23')$ 和在这个底上相同的高，故根据 c)，它们相抵，因此，根据 (2.8)，(2.9)，

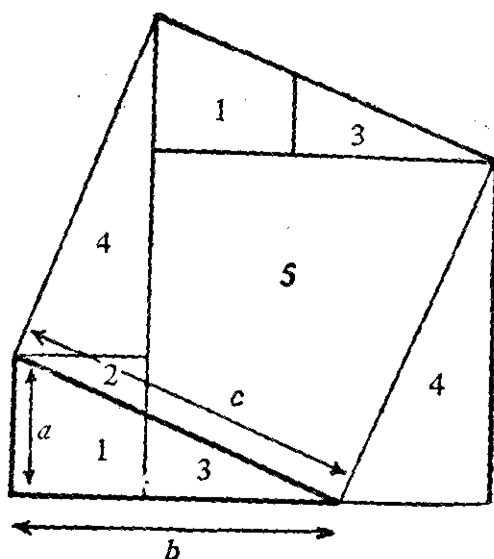
$$(123)\sim(12'3'). \tag{2.10}$$

但是，已给任意三角形，可以作一个和它同底同高的直角三角形，因而根据 c)，它和原三角形相抵. 于是根据 (2.10)，任意三角形和一个有一条侧边长两单位的直角三角形相抵. 这个结论和 a) 在一起，就对三角形，因而也对于一切多边形证明了引理 II.

现在，若 P 和 P' 为两个多边形，则根据引理 II，有两个标准矩形 R, R' 分别和它们等价：$P\sim R$, $P'\sim R'$. 若 P 和 P' 面积相同，则 R 和 R' 面积也相同，即 $R\cong R'$. 于是由相抵的可递性可知 $P\cong P'$. 这就完成了定理 I 的证明.

3. 相抵多边形的分解

在上节里，我们证明了有相同面积的两个多边形可以用同一



个有限集合的多边形拼成. 有一定意义的课题是(至少对于某些特殊情形): 求所需多边形的最低数.

例. 勾股定理 设 a, b 为一个直角三角形的两条侧边长, c 为斜边长,则以 c 为边的正方形面积 = 以 a 和 b 为边的两个正方形面积之和. 附图显示 a^2+b^2 和 c^2 如何能用同样的五个多边形拼成. 可以证明, 为了证明勾股定理, 至少需要把以 c 为边的正方形分解为五个多边形.

4. 多面体对于正则重分的相抵类

在讨论多面体相抵问题之前, 我们先讨论它们对于正则重分的相抵这样一个远为简单的问题.

已给两个多面体 A 和 B,若它们可以依次分解为多面体 A_i 和 B_i, $i=1,2,\cdots,n$, 其中每两个 A_i 或 B_i 或者没有公共点, 或者只有一个公共顶点, 或者只有一个公共棱, 或者只有一个公共面(可以和第一章的重分概念比较),而且

$$A=\sum_{i=1}^{n} A_i,\quad B=\sum_{i=1}^{n} B_i,\ A_i\cong B_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

则 A, B 就叫做对于正则重分相抵,用 $A\approx B$ 表示.

在第一章, 我们证明了一个多面体的两种重分总有一个共同的正则重分. 因此, 由 $A\approx B$ 和 $B\approx C$ 可知 $A\approx C$, 故可以把

多面体分为对于正则重分的相抵类.

引理 III $A \approx B$ **的一个必要条件** 设 A 和 B 为多面体, α_i, $i = 1, 2, \cdots, r$, 和 β_j, $j = 1, 2, \cdots s$, 表示它们的两面角. 若 $A \approx B$, 则有正整数 m_i, n_j, $i = 1, 2, \cdots, r$, $j = 1, 2, \cdots, s$, 以及整数 k, 满足

$$\sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i = \sum_{j=1}^{s} n_j \beta_j + k\pi. \tag{4.1}$$

证明 在 $A \approx B$ 的假设下, 存在着 A, B 的正则重分 $A = \sum_{i=1}^{M} A_i$, $B = \sum_{i=1}^{M} B_i$, 其中 $A_i \cong B_i$; 用 φ_k, $k = 1, 2, \cdots, N$, 表示 A_i 的两面角, $i = 1, 2, \cdots, M$.

我们将计算 $\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \varphi_k$; 方法是, 先对于 $\sum_{i=1}^{M} A_i$ 中的每一条棱计算两面角 φ_k 的和, 然后对于一切棱取和. 对于 ΣA_i 的一条内棱, φ_k 的和是 2π; 而对于边界上一条棱, φ_k 的和则等于该棱所在的 A 的棱的二面角. 因此,

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \varphi_k = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i + 2k_1\pi, \tag{4.2}$$

其中 m_i 是在重分 $A = \sum_{i=1}^{M} A_i$ 中, 两面角为 α_i 的棱分解成 A_i 的棱的数目, 而 k_1 则是重分后内棱的数目.

由于 $A_i \cong B_i$, $i = 1, 2, \cdots, M$, φ_k 可以看作多面体 B_i 的两面角. 因此, 仿照上面的推论, 又有

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \varphi_k = \sum_{j=1}^{s} n_j \beta_j + 2k_2\pi. \tag{4.3}$$

由 (4.2) 和 (4.3), 令 $k = 2k_2 - 2k_1$, 就得

$$\sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i = \sum_{j=1}^{s} n_j \beta_j + k\pi.$$

证毕.

定理 II*). 存在着体积相同但对于正则重分不相抵的多面

*) 这个定理及其证明是 Bricard 给出的.

体.

证明 用X表示具有单位体积的正四面体，而Y表示具有单位体积的正立方体. 我们将证明 $X \not\approx Y$.

设 α_i, $i=1,2,\cdots,6$, β_j, $j=1,2,\cdots,12$,依次表示X和Y的两面角. 通过简易计算,可知

$$\alpha_i=\gamma=\cos^{-1}\frac{1}{3},\quad i=1,2,\cdots,6,$$

$$\beta_j=\frac{\pi}{2},\qquad\qquad j=1,2,\cdots,12.$$

若 $X\approx Y$ 成立，则根据引理 I，对于某些正整数 m_i, n_j 和某个整数 k,

$$\sum_{i=1}^{6} m_i\alpha_i=\gamma\sum_{1}^{6} m_i=\sum_{j=1}^{12} n_j\beta_j+k\pi \tag{4.4}$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{12} n_j+k\pi.$$

我们将证明 γ 和 π 是无公度的，因而象 (4.4) 那样的关系不能存在,即 $X\approx Y$ 不能成立,

令 $$\zeta=e^{i\gamma}=\cos\gamma+i\sin\gamma=\frac{1}{3}+\frac{i}{3}\sqrt{8};$$

则 ζ 是二次方程

$$3\zeta^2-2\zeta+3=0 \tag{4.5}$$

的根.

首先我们将证明：对于任意正整数 m，存在着依赖于m的整数 a, b，使得

$$3^{m-1}\zeta^m=a\zeta+b, \tag{4.6}$$

其中 $$a\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3). \tag{4.7}$$

我们用归纳法来证明这个论断. 根据 (4.5),当 $m=2$ 时,(4.6) 成立. 假定 (4.6) 对于m成立,则乘以 3ζ,并把 $3\zeta^2-3$ 代入,得

$$\begin{aligned}3^m\zeta^{m+1}&=3a\zeta^2+3b\zeta=a(2\zeta-3)+3b\zeta\\&=(2a+3b)\zeta-3a.\end{aligned}$$

由于 a 满足 (4.7), $2a+3b\not\equiv 0 \pmod 3$, 故上式的系数也满足 (4.7),即 (4.6) 对于 $m+1$ 也成立.

现在假定 γ 是 π 的有理数倍数,则 ζ 将是 1 的一个根,即对于某个整数 N,

$$\zeta^N = 1.$$

但当 $m=N$ 时,由 (4.6) 得

$$3^{N-1}\zeta^N = a\zeta + b = 3^{N-1}.$$

令两边的虚部相等,就得 $a=0$,与 (4.7) 矛盾.于是 γ 为 π 的有理数倍数的假设导致矛盾. 这就证明了对于正则重分,具有单位体积的正方体和具有单位体积的正四面体不相抵.

5. 多面体的相抵类

在本节里,我们主要是证明

定理 III 存在着体积相同而不相抵的多面体.

由定理 III 可知,在三维空间里不能建立关于体积的初等理论.

我们将通过和引理 III 类似的引理来证明定理 III.

引理 IV 设 A 和 B 为多面体, $\alpha_i, i=1,2,\cdots,r$, 和 $\beta_j, j=1,2,\cdots,s$,表示它们的两面角. 若 $A\sim B$,则存在着正整数 m_i, m_j, $i=1,2,\cdots,r$, $j=1,2,\cdots,s$,以及整数 k,使

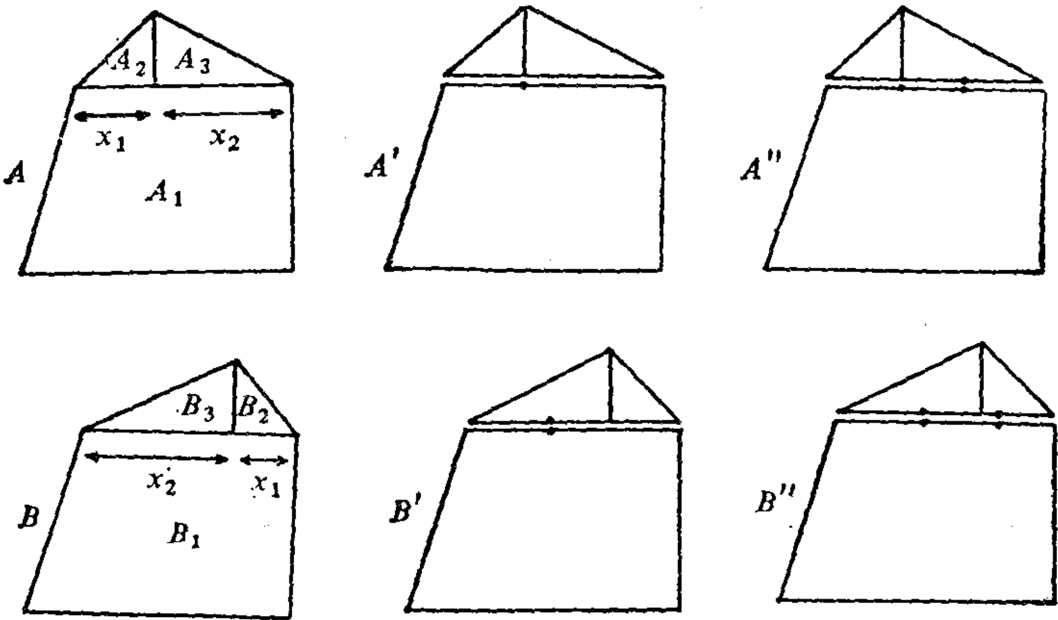
$$\sum_{i=1}^{r} m_i\alpha_i = \sum_{j=1}^{s} n_j\beta_j + k\pi. \tag{5.1}$$

方程 (5.1) 和 (4.1) 形式相同. 但在第 4 节里,我们举了一个例,其中体积相同的两个多面体 X 和 Y 的有关两面角不能满足这样的方程,因此由引理 VI 可知,不但 $X\approx Y$ 不能成立, $X\sim Y$ 也不能成立. 这样就证明了定理 III.

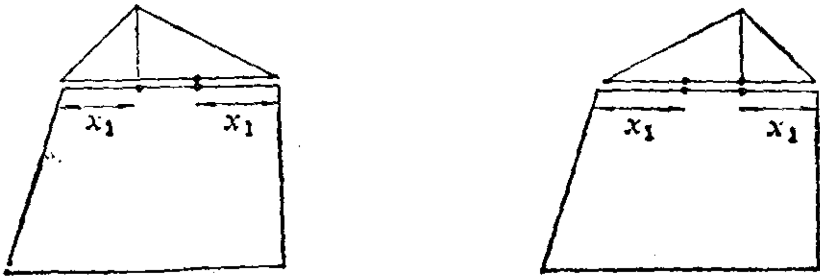
于是关键问题就是证明引理 IV. 在这里,不能使用证明引理 III 所用的简捷方法,因为那里用到了重分的正则性.

证明前的评论 我们可能企图由 A, B 的非正则重分 $A=\sum A_i$, $B=\sum B_i$ 获得它们的正则重分,以便由 $A\sim B$ 推得 $A\approx B$,

从而把引理 IV 归结为引理 III. 为此,我们可以尝试在 A_i 上引进一些新的顶点和棱,使得它和其它 A_j 相连接处有相同的顶点和棱. 假定在 A_i 和别的 A_j 相连接处,对 A_i 引进后者的顶点和棱以得到 A'_i, 然后在 B_i 上引进相对应的新顶点和棱以得到 B'_i, 由于 $B=\sum B_i$ 一般不是正则重分, 我们还得在 B'_i 和其它 B_j 相连接处对 B'_i 引进后者的顶点和棱以得到 B''_i, 这个重分又得搬回到 A'_i,照此往下做. 只有经过有限多步后,这种做法不需继续了,我们才能得到 A, B 的一个共同的重分. 附图(为简明起见, 该图显示二维情况)表明,上述步骤可能是无限的. 容易看出,若 x_1,x_2 是无公度的,则重分步骤不会经过有限多步就中止[1].



1) 这个例似不能表示步骤无限,因为达到下面的重分时,步骤即可中止. ——译者注

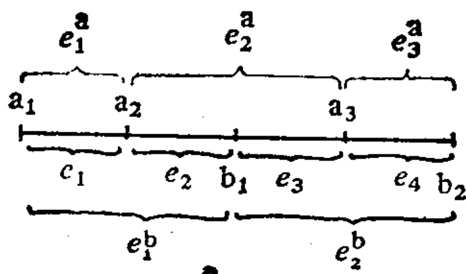


引理 IV 的证明*) 设 $A \sim B$,则有多面体 $C_i, i = 1,2,\cdots,n$,使

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ B = \sum_{i=1}^{n} B_i,$$

$$A_i \cong B_i \cong C_i,\ i = 1,2,\cdots,n.$$

对于 $\sum_{i=1}^{n} A_i$ 里的 $A_i, i = 1,2,\cdots,n$,考虑一切和它的棱相关联的 A_j 的顶点,$j = 1,2\cdots,n$,并用 a_j 表示它们在多面体 C_i 上的对应点。与此相应,C_i 上还有 b_j。这些点 a_j,b_j 把 C_i 的那些棱分成节,用 e_k 表示。a_j 点也把 C_i 那条棱分成节 e_k^{a},而每个 e_k^{a} 是有限多个 e_k 的并集。与此类似,又有节 e_k^{b}。对每个 e_k,指定一个正整数 p_k。这样,对于每个 $e_j^{\mathrm{a}} = e_{r_1} + e_{r_2} + \cdots + e_{r_m}$,可以指定一个正整数 $p_j^{\mathrm{a}} = p_{r_1} + p_{r_2} + \cdots + p_{r_m}$;与此类似,对于每个 $e_j^{\mathrm{b}} = e_{s_1} + e_{s_2} + \cdots + e_{s_n}$,指定一个整数 $p_j^{\mathrm{b}} = p_{s_1} + p_{s_2} + \cdots + p_{s_n}$。



引理 V 对于每个 e_k,可以指定正数 p_k,使得在 $\sum A_i$ 中,当 $e_{k_1}^{\mathrm{a}}$ 和 $e_{k_2}^{\mathrm{a}}$ 重合时,

$$p_{k_1}^{\mathrm{a}} = p_{k_2}^{\mathrm{a}}, \tag{5.2}$$

与此类似,在 $\sum B_i$ 中,当 $e_{k_1}^{\mathrm{b}}$ 和 $e_{k_2}^{\mathrm{b}}$ 重合时,

$$p_{k_1}^{\mathrm{b}} = p_{k_2}^{\mathrm{b}}. \tag{5.3}$$

证明 我们将利用下面的代数引理来证明引理 V。

引理 VI 若 C_{ij} 是整数而齐次方程组

---

*) 这个证明是 Kagan 的,*Math. Ann.*, Bd. **57**.

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij}x_j = 0, \ i = 1,2,\cdots, m \tag{5.4}$$

有一个解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中 $x_i > 0, i = 1,2,\cdots, n$, 则必有另一个解 $\boldsymbol{Q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$,其中 q_i 是正整数, $i = 1, 2,\cdots, n$.

引理 VI 的证明 根据线性方程组理论, (5.4) 的一切解可以写成有限多个有理矢 $\boldsymbol{X}_h, h = 1,2,\cdots, H, H \leqslant n$,的线性组合. 因此 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2,\cdots, x_n)$ 可以写成

$$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2,\cdots, x_n) = \lambda_1\boldsymbol{X}_1 + \cdots + \lambda_H\boldsymbol{X}_H.$$

令

$$\boldsymbol{X}' = (x_1', x_2',\cdots, x_n') = \lambda_1'\boldsymbol{X}_1 + \cdots + \lambda_H'\boldsymbol{X}_H,$$

其中 λ_h' 是有理数. 可以选择 $|\lambda_h - \lambda_h'|$ 充分小,使 $x_i' > 0, i = 1, 2,\cdots, n$. $\boldsymbol{X}_h$ 既然是有理矢,而 λ_h' 又选的是有理数, x_i' 也就都是有理数. 由于齐次线性方程组的解的常数倍也是解, 可以用 x_i' 的公分母乘 $\boldsymbol{X}'$ 以得到一个整数解. 证毕.

注意方程 (5.2) 和 (5.3) 是具有整数系数的含 p_k 的齐次线性方程. 若把 p_k 写成 x_k,则立刻可以看出,它们有一个解是 $x_k = e_k$ 的长. 由于 $x_k > 0$, 由引理 VI 可知, (5.2) 和 (5.3) 有正整数解. 若选择这些整数作为 p_k,就证明了引理 V.

现在回到引理 IV 的证明. 对于每个 e_k, e_k^a,和 e_k^b, 依次指定一个角 φ_k, φ_k^a, φ_k^b,它们依次等于 e_k, e_k^a, e_k^b 在 C_i 上所在的棱上的二面角. 由定义可知,若 e_{k_1} 和 e_{k_2} 为 $e_{k_3}^a$ 的一部分,则

$$\varphi_{k_1} = \varphi_{k_2} = \varphi_{k_3}^a;$$

同样,若 e_{l_1}, e_{l_2} 是 $e_{l_3}^b$ 的一部分,则

$$\varphi_{l_1} = \varphi_{l_2} = \varphi_{l_3}^b.$$

对一切 k,取总和

$$\sum p_k\varphi_k. \tag{5.5}$$

在节 e_k 的集合中,属于同一个 e_l^a 的 e_k 构成一个子集. 我们把同一个子集中的 e_k 所对应的一切项 $p_k\varphi_k$ 放在一起. 这样就把 (5.5) 的项重新组合;显然,(5.5) 可以写成

$$\sum p_k^a \varphi_k^a. \tag{5.6}$$

我们现在计算 (5.6). 在总和 $\sum A_i$ 中，我们把一切互相重合的节 $e_{k_i}^a$ 所对应的一切项 $p_k^a \varphi_k^a$ 放在一起. 根据引理 IV，对于一切这样重合的节，正整数 $p_{k_i}^a$ 都相同，因此在每条棱上，$\sum p_{k_i}^a \varphi_{k_i}^a$ 等于

(a) $\pi p_{k_i}^a$，如果节 $e_{k_i}^a$ 在某一个 A_i 的面上；

(b) $2\pi p_{k_i}^a$，如果 $e_{k_i}^a$ 在 $A = \sum A_i$ 里是一条内棱，不在 A 的一个面上；

(c) $p_{k_i}^a \alpha_i$，如果 $e_{k_i}^a$ 在 A 的一个棱上，其二面角是 α_i.

于是可以看出，总和 (5.6) 等于

$$\sum_i m_i \alpha_i + k_1 \pi, \tag{5.7}$$

这里的和是对于 A 的一切二面角取的，m_i 表示正整数，k_1 表示整数.

对多面体 B，重复上述推理，就得到总和 (5.5) 的值

$$\sum_j n_j \beta_j + k_2 \pi, \tag{5.8}$$

这里的和是对于 B，的一切二面角取的，n_j 表示正整数，k_2 表示整数.

令 (5.7) 和 (5.8) 相等，并令 $k = k_2 - k_1$，就得 (5.1).

定理 VI 的系理 若把一切体积为 1 的多面体分为相抵类，则至少得到两类.

Dehn 以及较近的 Sydler[1] 得到一个更具体的结果:

定理 IV 体积为 1 的多面体的相抵类的势与连续统同.

在此将不证明这定理.

6. 相 抵 棱 柱

在上一节里，我们证明了具有相同体积的多面体不都是相抵

---

1) Sydler, J. P., Sur la décomposition de Polyèdres, *Comment. Math. Helv.*, **16**, 266—273 (1944).

的．这就向我们提出一个重要而有趣的课题：求属于同一个相抵类的多面体的公共特征．

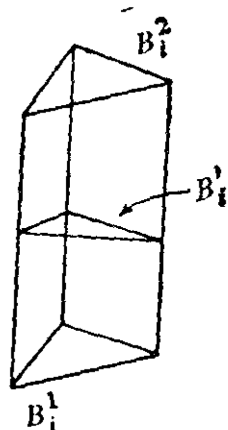
这是一个困难的课题，还没有完全解决．Dehn 得到了一些部分结果，得到了比引理 IV 更强的关于相抵的必要条件．

我们将证明

定理 V 体积相同的一切棱柱属于同一个相抵类．

证明 把棱柱 P 的底分解为小多边形，使每个小多边形的半径(即它两点间的最大距离) $<\frac{h}{2}\sin\alpha$，其中 h 是高，α 是母线和高所作的角．

以这些多边形为底，以 P 的母线为母线，作棱柱 P_i，则 P 分解为 P_i．取 P_i 在高 $h/2$ 处的任意点，经过它作平面垂直于 P_i 的母线；这个平面把 P_i 分成两部分 P_i^1 和 P_i^2． 由于 P_i 的底的半径 $<\frac{h}{2}\sin\alpha$，这个平面同 P_i 的底面 B_i^1 和顶面 B_i^2 都不相交．于是可以把 P_i^1 和 P_i^2 连接，使 B_i^1 和 B_i^2 重合，以得到一个正棱柱 P_i'，它的高是 $h'=h/\cos\alpha$．由作图法，可知 $P_i\sim P_i'$．



根据定理 I，P_i' 的底 B_i' 和一个标准矩形等价，而 P_i' 是一个正棱柱，故 P_i' 和一个正矩形棱柱(即一个矩体) P_i'' 等价，这个矩体有一边是 1，一边是 h'；于是 P_i 也和 P_i'' 等价．把这些 P_i'' 首尾相连接，使它们的 $1\times h$ 的面依次重合，就得到一个正棱柱 P''，它有两边是 1 和 h，于是 $P\sim P''$．再一次根据定理 I，可以作一个标准矩体 $P'''\sim P$．由于 P''' 的第三边决定于 P 的体积，可见一切具有和 P 同体积的棱柱与同一个 P''' 相抵，因而根据等价的可递性属于同一个相抵类．　　　证毕．

广义相抵概念 已给多面体 A 和 B，如果有另两个多面体 C 和 C'，其中 C 和 A，C' 和 B 都没有公共内点，而且

$$C\sim C',\ A+C\sim B+C',$$

则 A 和 B 称为对于分解及扩充相抵，用 $A \ominus B$ 表示．显然 $A \sim B$ 包含 $A \ominus B$．

Sydler*) 证明了，由 $A \ominus B$ 可以推得 $A \sim B$，即这个对于分解及扩充相抵的概念并不比只对于分解相抵的概念更加一般化．它的唯一优点是，若 $A \sim B$，这个结论不必用阿基米德公理即可证明．

已给多面体 A 和 B，若

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \sum_{i=1}^{n} B_i,$$

其中 A_i 和 A_j，B_i 和 B_j，$i \neq j$，没有公共内点，而且 A_i 和 B_i 全等，定向也相同，$i = 1, 2, \cdots, n$，则 A 和 B 称为相抵而且同向的．

Gerling 证明了，两个镜面对称的多面体总可以分解成有限多个分别全等而同向的多面体． 所以由 $A \sim B$ 总可以推知它们相抵而且同向．

关于相抵问题以及有关问题的全面讨论，可参考 Sydler 的论文．

问　　　题

第一章

(1) 以一个隅 G 的诸面的法线为棱的隅 G' 叫做 G 的极隅． 按以下方法推导关于凸多面体 P 的欧拉公式：对于 P 的每一个顶点作那里的隅的极隅，并利用平面和球面多边形的面积公式．（提示：求 G 的面(多边形)的角和 G' 的二面角之间的关系．）

(2) 把这个证明推广到 p 亏多面体．

(3) 把这个证明推广到 n 维凸多面体．

(4) 在一个特殊的 p 亏曲面上构造具有以下奇点的矢场．

(a) 两个指数为 $+1$ 的奇点，$2p$ 个指数为 -1 的奇点．（提示：

---

*) 见前一个注．

把矢场看作一个函数的梯度场，这函数有一个极大点，一个极小点，$2p$ 个鞍点.）

(b) 两个指数为 $1-p$ 的奇点.

(c) 一个指数为 $2-2p$ 的奇点.

(d) k 个奇点，其指数分别为 $j_1, j_2, \cdots, j_k$，

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_k = 2 - 2p.$$

(5) 取乘积

$$(1 - f_{r_1}(\boldsymbol{X}))(1 - f_{r_2}(\boldsymbol{X}))\cdots(1 - f_{r_s}(\boldsymbol{X})),$$

其中函数 $f_r(\boldsymbol{X})$ 的定义见第 14 节. 把这个乘积展开，在 $(n-1)$ 维幺球面上取积分，并对于 s 个 $f_i(\boldsymbol{X})$ 的一切组合取和. 把这个结果写成 $\sigma_r(r = 0,1,\cdots,n)$ 之间的齐次线性关系，其中 σ_r 是单形的一切 r 维面的角之和.

这 $n+2$ 个关系中有几个线性无关?

第二章

(1) 对于多边形，给出并证明类似四顶定理的一个定理.

(2) 通过一个具体的例子来说明，对于自己相交的曲线，四顶定理不成立. 考察 Bieberbach 的 Differentialgeometrie 中关于四顶定理的证明，并说明它为什么不能用于自己相交的曲线.

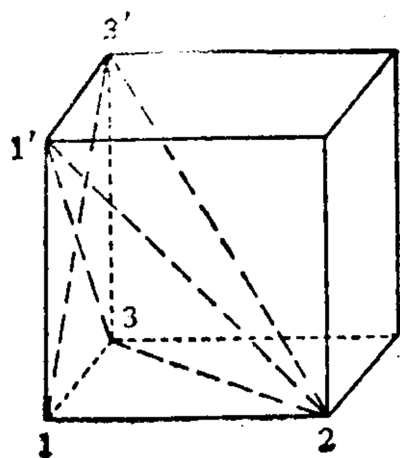
第四章

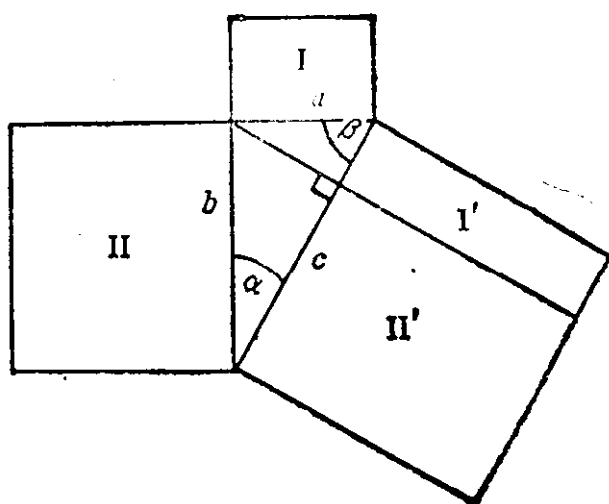
(1) (a) 证明四面体 1231′ 不能和一个正立方体等价.

(b) 证明四面体 1233′ 和一个立方体等价，并指出这个结论可以通过把四面体分解为不多于五个部分来证明.

(2) 欧几里得(Euclid)的一个定理说，矩形 I, I′ 以及 II, II′ 面积相等. 根据定理 I, I ~ I′, II = II′，把这些矩形分解为逐对全等的多边形来证明上述等价关系. 把 I 和 II 分别至少分解为几个部分才能证明这些等价关系?（通过角 α, β 来表述.）

(3) 证明两个镜面对称四面体相抵而且同向.


3'
1'
3
1
2


I
a
β
b
II
1'
c
α
II'

第二部分　整体微分几何

斯坦福大学，1956

记录者　J. W. Gray

引　言

这一系列的讲演基本上是讨论二维曲面的整体几何. 曲面的内蕴黎曼几何涉及不多,主要对象是三维欧氏空间的曲面,特别是闭曲面.

第一章是经典局部微分几何的复习, 第二章论述可微闭曲面(不一定含在 E^3 里)的若干一般事实.接着是关于闭曲面的黎曼几何的一短章,考察曲面的高斯曲率,曲面上方向场的奇点,以及曲面的拓朴结构之间的关系. 其余各章专论 E^3 里的曲面.

关于第一章的内容可以在下面诸书中找到详细的论述.

Struik, D. J., Classical Differential Geometry.

Darboux, G., Leçous sur la théorie générale des surfaces.

Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, Vol.1.

第　一　章

曲面的局部微分几何(纲要)

0. 记　号

我们将采用以下记号：

我们将有一个“参数平面” E^2，上面有笛卡儿坐标 (u, v) 或 (u^1, u^2)，还有一个欧氏空间 E^3，上面有笛卡儿坐标 (x, y, z) 或 (x^1, x^2, x^3).

矢量（一般是在 E^3 里）用黑体大写拉丁字母表示，如 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ 等．白体大写拉丁字母则用来表示其它一些东西，其意义将可从上下文看出．并列的两个矢量表示其数积，×表示矢积.

若 $u = u(t)$,其中 u 是参数,则 $u' = \dfrac{du}{dt}$. 若 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(u,v)$,

则 $\boldsymbol{X}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}$, $\boldsymbol{X}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}$; 若 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(u^1, u^2)$, 则 $\boldsymbol{X}_1 = \dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^1}$,

$\boldsymbol{X}_2 = \dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^2}$. 若再有 $u = u(t)$, $v = v(t)$,则 $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}_u u' + \boldsymbol{X}_v v'$.

若 $\boldsymbol{X} = (x, y, z)$ 而 x, y, z 是 u 和 v 的函数,则 $\boldsymbol{X}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\boldsymbol{X}_v = (x_v, y_v, z_v)$, $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 的定义与此相仿． 若 $\boldsymbol{X} = (x(t), y(t), z(t))$ 是一条曲线，则 $\boldsymbol{X}' = (x', y', z')$. 若 $t = s$ 是弧长,则 $\boldsymbol{X}'$ 用 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 或 $\boldsymbol{X}^{\bullet}$ 表示.

一点说明　只要结论和证明有需要，我们就假定导函数存在而且连续(不加声明)．我们不特别企图为了给出“最好”结果而规定关于导函数的最低条件．但是,当需要假定函数是解析函数时,我们将明确指出． 一般地，我们要求大多数式子中出现的函数是两次连续可微的,这些式子才有意义，还要求它们是三次可微的，才能对它们进行推算.

1. 初等概念

1.1. 定义 E^3 里一个曲面是 uv 平面(叫做参数平面)上一个区域 R 到 E^3 里的映象，但须满足以下条件：若映象是通过函数 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ 确定的,则

1) 一切一阶偏导函数存在,而且连续(必要时,需有更强的假设);

2)
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2.$$

这个曲面用 $\boldsymbol{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 表示.

1.2. 定理 若从 uv 平面的域 R 到 E^3 的映射确定一个曲面,则它是一个局部同胚映射；即在 R 的点的一个邻域和该邻域的象之间,它确定一个同胚对应.

证明 可以假定

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

这时曲面在 xy 平面内的投影是 uv 平面到 xy 平面内的一个局部同胚映射,因为它的雅科比(Jacobi)行列式不等于零. 所以,到曲面内的映射是一对一的,而且把开集变成开集,因此,这个映射是局部同胚的.

1.3. 定义 若 $\boldsymbol{X} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 是一个曲面,则 $\boldsymbol{X}_u$, $\boldsymbol{X}_v$ 都是曲面的切矢;它们所确定的平面叫做切面.

矢量 $\bar{\boldsymbol{X}} = \dfrac{\boldsymbol{X}_u \times \boldsymbol{X}_v}{|\boldsymbol{X}_u \times \boldsymbol{X}_v|}$ 是曲面的幺法矢.

1.1 中的条件可以说成 $\boldsymbol{X}_u \times \boldsymbol{X}_v \neq 0$;即 $\boldsymbol{X}_u$, $\boldsymbol{X}_v$ 都不是零矢而且方向不同.

1.4. 定义 一个运动是平移、转动、反射或它们的任意结合.

一个可容许的参数变换是 $\bar{u}\bar{v}$ 平面的一个域 $\bar{R}$ 到 uv 平面的一个域 R 的一对一变换,而且 $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0$.

在这样一个变换中，往往需要缩小某些式子的适用域．在一定意义下，这是经典微分几何的特点；在整体微分几何里，恰恰是不许可这种做法的．

若 $\boldsymbol{X}(u, v)$ 是一个曲面，则经过容许的参数变换，$\boldsymbol{X}(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ 显然也是一个曲面，它和 $\boldsymbol{X}(u, v)$ 是同一个点集所构成的．若 $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0$，则 $\boldsymbol{X}_{\bar{u}} \times \boldsymbol{X}_{\bar{v}}$ 和 $\boldsymbol{X}_u \times \boldsymbol{X}_v$ 方向相同；否则方向相反．

2. 第一基本齐式

2.1. 定义 若 $\boldsymbol{X}(u, v)$ 是曲面，则

$$\boldsymbol{X}_u^2 du^2 + 2\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v dudv + \boldsymbol{X}_v^2 dv^2$$

叫做曲面的第一基本齐式．若 $E = \boldsymbol{X}_u^2$, $F = \boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v$, $G = \boldsymbol{X}_v^2$，则它可以写成

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

若用坐标 (u^1, u^2) 来代替 (u, v)，则第一基本齐式就可以写作

$$g_{ij}du^i dv^j, \text{其中 } g_{11} = E,\ g_{12} = g_{21} = F,\ g_{22} = G.$$

2.2. 设 $u(t)$, $v(t)$ 确定 uv 平面上一条曲线．若 $\boldsymbol{X}(u, v)$ 是一个曲面，则 $\boldsymbol{X}(u(t), v(t))$ 是曲面上一条曲线．这条曲线的长，作为定义，是 $\int \sqrt{(\boldsymbol{X}')^2}\, dt$．由于 $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}_u u' + \boldsymbol{X}_v v'$，我们立刻得到

$$\begin{aligned}\int \sqrt{(\boldsymbol{X}')^2}\, dt &= \int \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\, dt \\ &= \int \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.\end{aligned}$$

因此，在曲面上，弧长元素 ds 用下式确定：

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

据此，第一基本齐式是恒正的．

2.3. 已给两条相交曲线，则曲线之间的角就是切线间的角．

若采用坐标 (u^1, u^2)，它们的切矢依次可以写成切矢 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 的线性组合 $a^i\boldsymbol{X}_i$ 和 $b^i\boldsymbol{X}_i$. 若 γ 为曲线切线间的角，则

$$\cos\gamma = \frac{g_{ij}a^ib^j}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}\,\sqrt{g_{ij}b^ib^j}}.$$

2.4. 曲面 X 的一个域的面积 A 用下式确定：

$$A = \iint\sqrt{EG-F^2}\,dudv = \iint\sqrt{\det(g_{ij})}\,du^1du^2.$$

2.5. 由以上说明，可见曲面的第一基本齐式基本上确定该曲面的度量性质. 容易看出，这些概念对于运动和对于可容许参数变换都是不变的. 事实上，若 g_{ij} 是基本齐式对于 (u^1, u^2) 的分量，而 $\bar{g}_{hk}$ 是对于 $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ 的分量，则

$$g_{ij}du^idu^j = \bar{g}_{hk}d\bar{u}^hd\bar{u}^k,$$

即 g_{ij} 的变化就像一个二阶协变张量那样. 若 X, Y 是可以通过运动互相转变的两个曲面，它们就有相同的第一基本齐式，但这论断的逆理不正确.

2.6. 定义 设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 为两个曲面. 若在 X 和 Y 之间有一个同胚对应，使对应曲线的长相等，则 X 和 Y 称为*等距的*，而这个同胚对应就叫做*等距对应*.

若引进参数 u, v，使 $\boldsymbol{X}(u, v)$ 和 $\boldsymbol{Y}(u, v)$ 在一个同胚对应 h 中是对应点，则 h 为等距对应的充要条件是：对于 u, v，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 有相同的第一基本齐式.

3. 短 程 线

3.1. 定义 设 $\boldsymbol{X}$ 为曲面，$\boldsymbol{X}(s)$ 为曲面上一条曲线，其中 s 是弧长. 若 $\ddot{\boldsymbol{X}} = \lambda\bar{\boldsymbol{X}}$，则 $\boldsymbol{X}(s)$ 叫做一条*短程线*. 若 u, v 是曲面参数，则这个条件等价于 $\ddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}_u = 0$，$\ddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}_v = 0$. 从这两方程消去弧长 s，并取 v 作为曲线参数，就可以看出，曲线满足一个二阶微分方程

$$u'' = f(u', u, v).$$

于是有下面定理

3.2. 定理 已给曲面上一点以及曲面在该点的一个方向，则经过该点，沿所给方向，恰好有一条短程线.

3.3. 定理 曲线 $\boldsymbol{X}(s)$ 为短程线的一个充要条件是：对于 $\boldsymbol{X}(s)$ 上的每两点 a 和 b，$\boldsymbol{X}(s)$ 在 a，b 间的长 $\mathfrak{L}$ 对于曲线在 a 和 b 之间的变分有逗留值.

证明 设 $\boldsymbol{X}(s, \tau)$ 是连结 a，b 的一族曲线，$\boldsymbol{X}(s, 0)=\boldsymbol{X}(s)$，并令

$$\mathfrak{L}(\tau) = \int_a^b \sqrt{[\boldsymbol{X}(s, \tau)]^2}\, ds.$$

我们先证明，若 $\boldsymbol{X}(s)$ 是短程线，$\mathfrak{L}'(0) = 0$. 通过简单计算，可知

$$\mathfrak{L}'(0) = \int_a^b \frac{\dot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}'ds}{\sqrt{(\dot{\boldsymbol{X}})^2}}.$$

但 s 是弧长，故 $\dot{\boldsymbol{X}}^2 = 1$. 由于 $(\dot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}')^{\cdot} = \ddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}' + \dot{\boldsymbol{X}}\dot{\boldsymbol{X}}'$，经过分部积分，得

$$\mathfrak{L}'(0) = [\dot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}']_a^b - \int_a^b \ddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}'ds.$$

现在，$\dot{\boldsymbol{X}}$ 和曲线 $\boldsymbol{X}(s)$ 相切，而 $\boldsymbol{X}'$ 是沿曲线变动方向的矢量. 但 $\boldsymbol{X}(s, \tau)$ 经过 a，b，故 $[\dot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}']_a^b = 0$. 此外，由于 $\boldsymbol{X}'$ 是曲面的一个切矢，若 $\boldsymbol{Y}$ 是曲面与 $\boldsymbol{X}$ 垂直的切矢，可以令 $\boldsymbol{X}' = p(s)\dot{\boldsymbol{X}} + q(s)\boldsymbol{Y}$. 再由 $\dot{\boldsymbol{X}}^2 = 1$，可知 $\dot{\boldsymbol{X}}\ddot{\boldsymbol{X}} = 0$，因而

$$\mathfrak{L}'(0) = -\int_a^b (\ddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})q(s)ds.$$

若对于每个在 a，b 等于零的函数 $q(s)$，$\mathfrak{L}'(0) = 0$，则根据变分法的基本原理，必有 $\ddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = 0$，但 $\ddot{\boldsymbol{X}}\dot{\boldsymbol{X}} = 0$，故 $\ddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}=0$ 和条件 $\ddot{\boldsymbol{X}} = \lambda\bar{\boldsymbol{X}}$ 等价.

倒转来，若 $\ddot{\boldsymbol{X}} = \lambda\bar{\boldsymbol{X}}$，则 $\ddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = \lambda\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = 0$，因而 $\mathfrak{L}'(0) = 0$.

3.4. 定义 设 $\boldsymbol{C}$ 为曲面 X 上任意曲线. 设 v 为沿 $\boldsymbol{C}$ 的弧长. 根据 3.2，经过 $\boldsymbol{C}$ 的每一点，有唯一的垂直于 $\boldsymbol{C}$ 的短程线. 根据人们熟知的，关于微分方程的性质，这些短程线连续地依赖于它们和

$\boldsymbol{C}$ 的交点．因此，在 $\boldsymbol{C}$ 的邻近，它们彼此不相交；故若 u 是沿这些短程线的弧长，则 u 和 v 构成可容许参数系，称为一个短程坐标系，u，v 则称为短程参数．

3.5. 定理 若 u，v 是 $\boldsymbol{X}$ 上的短程参数，则 $ds^2 = du^2+g^2dv^2$．倒转来，若 $ds^2 = du^2 + gds^2$，则曲线 $v =$ 常数是短程线．

证明 一般地 $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv+Gdv^2$，若 u，v 是短程参数，则因 u 是弧长，$E=\boldsymbol{X}_u^2=1$．还必须证明 $F(u,v)=\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v=0$．现在按定义，$F(0, v) = 0$．于是根据 3.1，只须证明 $F_u=0$．但

$$F_u = \boldsymbol{X}_{uu}\boldsymbol{X}_v + \boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_{uv}.$$

其中，因为 $E = 1$，$\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_{uv} = \frac{1}{2}E_v = 0$；又由于 u 线是短程线，$\boldsymbol{X}_{uu} = \ddot{\boldsymbol{X}}$ 和曲面垂直．因为 $\boldsymbol{X}_v$ 是切矢，$\boldsymbol{X}_{uu}\boldsymbol{X}_v = 0$．故 $F_u=0$．最后，若 $g = +\sqrt{G}$，则

$$ds^2 = du^2 + g^2dv^2.$$

倒转来，设 a，b 为曲线 $v =$ 常数上两点，并设 D 为连接它们的任意曲线，则

$$\mathfrak{L}(D) = \int_a^b \sqrt{du^2 + g^2dv^2} \geqslant \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}),$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 表示曲线 $v =$ 常数．于是 $\boldsymbol{U}$ 是 a，b 间长度最小的曲线，因而是短程线．

4. 平　　移

4.1. 定义 设 s 为曲面 $\boldsymbol{X}$ 上一条曲线 $\boldsymbol{C}$ 的弧长，$\boldsymbol{Z}(s)$ 为沿曲线 $\boldsymbol{C}$ 的一个矢场．若 $\dot{\boldsymbol{Z}}$ 在切面点的分量是零，即 $\dot{\boldsymbol{Z}}_{\text{tang}} = 0$，则 $\boldsymbol{Z}$ 就叫做一个沿 $\boldsymbol{C}$ 的平行矢场．更确切地说，这是莱维奇维塔(Levi-Civita）意义下的平行性．

例 若 $\boldsymbol{C}$ 是短程线，则 $\ddot{\boldsymbol{X}}_{\text{tang}} = 0$，因为 $\ddot{\boldsymbol{X}}$ 垂直于曲面．因此，短程线的切矢 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 构成平行矢场．

4.2. 定理 若 $\boldsymbol{Z}_1$ 和 $\boldsymbol{Z}_2$ 是两个平行矢场，则 $\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2 =$ 常数．

证明 由于$\boldsymbol{Z}_1$和$\boldsymbol{Z}_2$是切矢而$\dot{\boldsymbol{Z}}_1$和$\dot{\boldsymbol{Z}}_2$垂直于曲面，$(\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2)^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{Z}}_1\boldsymbol{Z}_2+\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{Z}}_2=0$.

这个定理的一个特款是$\boldsymbol{Z}^2=$常数，故平行矢场中的矢量的长固定．于是两个矢场之间的角也是常数．所以这种平移是刚性的，因而我们可以谈论在一点的矢丛的平移．

4.3. 定理 已给曲面$\boldsymbol{X}(u,v)$上一条曲线$\boldsymbol{C}$以及在$\boldsymbol{C}$一点的矢量，则总有含该矢在内的一个沿$\boldsymbol{C}$的平行矢场．

证明 若$\boldsymbol{Z}(s)$是沿$\boldsymbol{C}$的一个平行矢场，我们要证明$\dot{\boldsymbol{Z}}_{\text{tang}}=0$和一个一阶微分方程组等价．显然，$\dot{\boldsymbol{Z}}_{\text{tang}}=0$等价于$\dot{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X}_k=0$，$k=1,2$．由于$\boldsymbol{Z}$是切矢，

$$\boldsymbol{Z}=z^i\boldsymbol{X}_i,$$

其中z^i是$\boldsymbol{Z}$的分量．故

$$\dot{\boldsymbol{Z}}=\dot{z}^i\boldsymbol{X}_i+z^i\dot{\boldsymbol{X}}_i=\dot{z}^i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_{ij}\dot{u}^jz^i.$$

因此，必有

$$0=\dot{z}^i\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_k+(\boldsymbol{X}_{ij}\boldsymbol{X}_k)\dot{u}^jz^i.$$

现在$\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_k=g_{ik}$． 若用$(g^{hj})$表示$(g_{jk})$方阵的逆，则用$g^{hk}$乘上式，就得

$$0=\dot{z}^h+g^{hk}\boldsymbol{X}_{ij}\boldsymbol{X}_k\dot{u}^jz^i.$$

若令$\Gamma^h_{ij}=g^{hk}\boldsymbol{X}_{ij}\boldsymbol{X}_k$，上式就可以写成

$$0=\dot{z}^h+\Gamma^h_{ij}\dot{u}^jz^i.$$

这就是所求的一阶微分方程组．于是存在性和唯一性都可以从人们熟知的这种方程组的性质推得．

4.4. 定理 在(u,v)是短程坐标的特款，$ds^2=du^2+g^2dv^2$，微分方程组简化为

$$\dot{\alpha}=-gu\dot{v},$$

其中α为$\boldsymbol{X}_u$和$\boldsymbol{Z}$之间的角．

证明 对于短程坐标，$\boldsymbol{X}_u^2=1$，$\boldsymbol{X}_v^2=g^2$，又根据4.2，可以令$|\boldsymbol{Z}|=1$，故$\boldsymbol{Z}$可以写成

$$\boldsymbol{Z}=\cos\alpha\boldsymbol{X}_u+\sin\alpha(g^{-1}\boldsymbol{X}_v).$$

于是

$$\dot{\boldsymbol{Z}} = \cos\alpha(\dot{\boldsymbol{X}}_u + \dot{\alpha}g^{-1}\boldsymbol{X}_v) + \sin\alpha(-\dot{\alpha}\boldsymbol{X}_u + (g^{-1}\boldsymbol{X}_v)^{\boldsymbol{\cdot}}).$$

但因 (u, v) 是短程坐标，由 $\boldsymbol{X}_u^2 = 1, (g^{-1}\boldsymbol{X}_v)^2 = 1$，可知 $\boldsymbol{X}_u\dot{\boldsymbol{X}}_u = 0, (g^{-1}\boldsymbol{X}_v)(g^{-1}\boldsymbol{X}_v)^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$；又 $\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v = 0$. 故

$$\dot{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X}_u = \sin\alpha(-\dot{\alpha} + (g^{-1}\boldsymbol{X}_v)^{\boldsymbol{\cdot}}\boldsymbol{X}_u) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X}_v g^{-1} = \cos\alpha(\dot{\alpha} + \dot{\boldsymbol{X}}_u(g^{-1}\boldsymbol{X}_v)) = 0.$$

又由 $\boldsymbol{X}_u(g^{-1}\boldsymbol{X}_v) = 0$，可知

$$\dot{\boldsymbol{X}}_u(g^{-1}\boldsymbol{X}_v) + \boldsymbol{X}_u(g^{-1}\boldsymbol{X}_v)^{\boldsymbol{\cdot}} = (\boldsymbol{X}_u g^{-1}\boldsymbol{X}_v)^{\boldsymbol{\cdot}} = 0.$$

因此，上两式中 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的系数只差一个符号. 由于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 不能同时等于零，

$$\dot{\alpha} + \dot{\boldsymbol{X}}_u(g^{-1}\boldsymbol{X}_v) = 0,$$

或者，用 $\dot{u}$ 和 $\dot{v}$ 表示

$$\dot{\alpha} + g^{-1}\boldsymbol{X}_{uu}\boldsymbol{X}_v\dot{u} + g^{-1}\boldsymbol{X}_{uv}\boldsymbol{X}_v\dot{v} = 0.$$

现在，$\boldsymbol{X}_{uu}\boldsymbol{X}_v + \boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_{uv} = (\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v)_u = 0$，又 $2\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_{uv} = (\boldsymbol{X}_u^2)_v = 0$，故 $\boldsymbol{X}_{uu}\boldsymbol{X}_v = 0$. 最后，由 $\boldsymbol{X}_v^2 = g^2$，可得 $\boldsymbol{X}_{uv}\boldsymbol{X}_v = \frac{1}{2}(g^2)_u$.

所以上式化为

$$\dot{\alpha} = -g_u\dot{v}.$$

由这个结果可以看出，在短程坐标下，平移方程决定于第一基本齐式. 但平移与坐标系无关，故这个结论适用于任意坐标系. 不过，为了便于在第 5 节中应用，我们将直接证明这个事实.

4.5. 定理 矢量平移方程只决定于第一基本齐式.

证明 我们只须证明 Γ_{ij}^h 决定于第一基本齐式. 由于 $\Gamma_{ij}^h = g^{hk}\boldsymbol{X}_{ij}\boldsymbol{X}_k$，只须考察

$$\Gamma_{ij,k} = \boldsymbol{X}_{ij}\boldsymbol{X}_k.$$

由 $g_{ik} = \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_k$ 可知 $\Gamma_{ij,k}$ 诸量满足以下关系

1) $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$;

2a) $\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i} = \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}$,

b) $-\Gamma_{jk,i} - \Gamma_{ik,j} = -\dfrac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}$,

c) $\Gamma_{ki,j}+\Gamma_{ji,k}=\dfrac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}$.

把方程 2a), b), c) 相加,并利用 1),就得

$$\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right).$$

5. 黎 曼 空 间

5.1. 定义 设 $dS^2=g_{ij}du^idu^j$ 为 uv 平面一个域内的一项黎曼度量(即 g_{ij} 构成恒正对称方阵),则仿照第 4 节,令

$$\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right),$$

$$\Gamma^h_{ij}=g^{hk}\Gamma_{ij,k}.$$

若 z^i 是在一条曲线上的一个逆变矢场的分量,而且它们满足方程

$$\dot{z}^h+\Gamma^h_{ij}\dot{u}^iz^j=0,$$

则该场称为平行场. 这组方程叫做平移方程.

若一条曲线的切矢满足平移方程,则该曲线叫做短程线.

5.2. 定理 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 依次为具有分量 a^i 和 b^i 的矢量,则数积 $\boldsymbol{AB}=g_{ij}a^ib^j$ 在平移下不变. 这个性质的重要意义在于:若含 u, v 的函数 $\Gamma_{ij,k}$ 对于前两个下标是对称的,而且用它们来作为平移方程的系数时,数积不变,则它们必须是 5.1 里的 $\Gamma_{ij,k}$.

练习 证明定理 5.2.

5.3. 定理 短程线满足一个二阶微分方程, 而在一条短程线上两点之间,沿短程线的距离,对于曲线在两点之间的变动有逗留值. 像第 3 节那样,沿一条曲线可以引进短程坐标.

6. 二维黎曼几何中的曲率

6.1. 设闭曲线 $\boldsymbol{C}$ 是一个二维黎曼流形上一个域 R 的边界, U 是 $R\cup\boldsymbol{C}$ 上一个连续的方向场, $\boldsymbol{Z}_0(\neq 0)$ 是在 $\boldsymbol{C}$ 上一点的矢量, $\boldsymbol{Z}_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是沿 $\boldsymbol{C}$ 平移 $\boldsymbol{Z}_0$ 所产生的场, $\alpha=\measuredangle[U,\boldsymbol{Z}_t]$, 则沿 $\boldsymbol{C}$, 变差 $\delta_C\alpha$ 等于角 $\measuredangle[\boldsymbol{Z}_0,\boldsymbol{Z}_1]\pmod{2\pi}$. 容易证明, $\delta_C\alpha$ 和

U 或 $\boldsymbol{Z}_0$ 的选择都无关.

6.2. 定理 设 R 是小得可以含在一个短程坐标系里的域,$\boldsymbol{C}$ 是 R 的边界,则

$$\delta_{\boldsymbol{C}}\alpha = -\iint_R \frac{g_{uu}}{g} dA,$$

其中 $dA = gdudv$ 是面积元素.

证明 应用 4.4,可得

$$\delta_{\boldsymbol{C}}\alpha = \oint_C \dot{\alpha}\ ds = -\oint_C g_u \dot{v} ds = -\oint_C g_u dv$$

$$= -\iint_R g_{uu} dudv = -\iint_R \frac{g_{uu}}{g} dA.$$

6.3. 定义 $K(\mathrm{a}) = -\dfrac{g_{uu}(\mathrm{a})}{g(\mathrm{a})}$ 叫做**高斯-黎曼曲率**, $\iint_R KdA$ 叫做域 R 的**总曲率**. 根据 6.2,一个域 R 的总曲率等于一个矢沿 R 的边界平移一周时,它的角的变化.

6.4. 定理 $K(\mathrm{a})$ 与在 a 点的坐标系无关.

证明 $K(\mathrm{a}) = -\dfrac{g_{uu}(\mathrm{a})}{g(\mathrm{a})} = \lim\limits_{\boldsymbol{C}\to \mathrm{a}} \dfrac{\delta_{\boldsymbol{C}}\alpha}{A}$, 其中 A 是 $\boldsymbol{C}$ 所包围的面积而 $\lim\limits_{\boldsymbol{C}\to \mathrm{a}}$ 表示曲线 $\boldsymbol{C}$ 缩成 a 点时的极限. 由于 A 和 $\delta_{\boldsymbol{C}}\alpha$ 都和坐标系无关,故定理成立.

6.5. 定理 若 K 为常数,则在规定边界条件下,对于所给 K 只有一种黎曼度量. 对应于 $K > 0$, $K < 0$ 和 $K = 0$ 三种情况的黎曼度量依次称为椭圆,双曲和欧氏度量.

证明 证明是容易的: 因为 g 满足微分方程 $g_{uu} + Kg = 0$.

6.6. 定理 在一个正交坐标系 (即 $F=0$) 下,若 $E=e^2$, $G=g^2$,则

$$K = -\frac{1}{eg}\left[\left(\frac{e_v}{g}\right)_v + \left(\frac{g_u}{g}\right)_u\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right].$$

7. E^3 里曲面的高斯曲率

7.1. 为了引导到 E^3 里曲面曲率的讨论，我们回顾平面曲线曲率的定义．若 $\boldsymbol{C}(s)$ 是平面曲线，其中 s 是弧长，又若 τ 是曲线切线和正 x 轴所作的角，则曲线曲率定义是 $k=\frac{d\tau}{ds}$．显然，我们也可以把 τ 作为曲线法线和正 x 轴所作的角．设 Γ 为 xy 平面上以原点 $(0,0)$ 为中心的幺圆，并考虑 $\boldsymbol{C}(s)$ 到 Γ 里的法线象：即对于每点 $\boldsymbol{C}(s_0)$，经过 $(0,0)$，作幺矢平行于 $\boldsymbol{C}(s)$ 在 s_0 的法矢，其终点就是 $\boldsymbol{C}(s_0)$ 在 Γ 上的法线象． 设 $\mathfrak{L}(s, s_0)$ 为 $\boldsymbol{C}(s)$ 在 s 和 s_0 之间的弧长，而 $\bar{\mathfrak{L}}(s, s_0)$ 为 Γ 上在 s 和 s_0 之间的弧长，则

$$\bar{\mathfrak{L}}(s, s_0)=\int_{s_0}^{s} d\tau=\int_{s_0}^{s} k ds.$$

故

$$k(s_0)=\lim_{s\to s_0}\frac{\bar{\mathfrak{L}}(s, s_0)}{\mathfrak{L}(s, s_0)}.$$

7.2. 对于 E^3 里的一个曲面 $\boldsymbol{X}(u, v)$，我们有一个类似的，在幺球 Σ 上的映射： 即经过 $(0, 0, 0)$ 作幺矢平行于 $\boldsymbol{X}(u, v)$ 在 (u_0, v_0) 的法矢，并以它的终点作为 $\boldsymbol{X}(u_0, v_0)$ 在 Σ 上的象． 这个映象叫做 $\boldsymbol{X}$ 的**球面象**． 设 $A(u_0, v_0)$ 为含 $\boldsymbol{X}(u_0, v_0)$ 在内的一个小域的面积，Ω 是这个域的球面象的面积，则曲率 K 的定义是

$$K(u_0, v_0)=\lim_{A\to 0}\frac{\Omega}{A}=\frac{d\Omega}{dA}.$$

高斯证明了(奇妙定理[1])：这个 K 只决定于曲面的第一基本齐式．事实上，可以证明，这个 K 和 6.3 的 K 是相同的． 由此可以立刻看出，若 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是等距曲面，它们在对应点有相同的曲率．

8. 第二基本齐式

8.1. 定义 曲面 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 的第二基本齐式是

---

1) Theorema Egregium．——译者注

$$X_{uu}\bar{X}du^2 + 2X_{uu}\bar{X}dudv + X_{vv}\bar{X}dv^2.$$

由于 $X_u\bar{X} = 0$, 因而 $X_{uu}\bar{X} = -X_u\bar{X}_u$ 等等，第二基本齐式可以写成

$$-X_u\bar{X}_u du^2 - 2X_u\bar{X}_v dudv - X_v\bar{X}_v dv^2.$$

若令 $L = -X_u\bar{X}_u$, $M = -X_u\bar{X}_v$, $N = -X_v\bar{X}_v$, 则上式又可以写成

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

若用坐标 (u^1, u^2) 来代替 (u, v)，则第二基本齐式还可以写成

$$l_{ij}du^i du^j,$$

其中 $l_{11} = L$, $l_{12} = l_{21} = M$, $l_{22} = N$.

我们将利用第二基本齐式来推知在一点的邻域的曲率的详细情况. 由于有下面的定理，我们也将涉及 $l_i^h = l_{ik}g^{kh}$ 诸量.

8.2. 定理 $\bar{X}_i = -l_i^j X_j$, 即 l_i^j 是规定曲面法矢变化率的线性变换的分量.

证明 由于 $\bar{X}_i$ 是一个切矢，$\bar{X}_i = a_i^j X_j$. 取它和 X_k 的数积就得$-l_{ik} = a_i^j g_{jk}$，因此，乘以 g^{kh}，就得

$$a_i^h = -l_{ik}g^{kh} = -l_i^h.$$

8.3. 由于 (l_i^j) 是一个线性变换的方阵，可以考察它在线性变换[1]下的不变量，即它的行列式，它的迹以及它的特征值. 可以证明

$$\det(l_i^j) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})} = K,$$

其中K是高斯-黎曼曲率.

作为中曲率H的定义，我们令

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(l_i^j)$$

其中 tr 表示迹. 容易证明

$$2H = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}.$$

---

1) 这是指在参数变换下，X_i 和 $\bar{X}_i$ 所经历的线性变换. ——译者注

若选取参数，使得在一点处，$E=G=1$，$F=0$，则 $(g_{ij})=(\delta_{ij})$ 而 $(g_{ij})^{-1}=(\delta_{ij})$. 这时 $(l_i^j)=(l_{ij})$ 是对称方阵. 因此，(l_i^j) 的特征值是实的，我们用 k_1 和 k_2 表示. k_1 和 k_2 叫做**主曲率**，它们满足

$$k_1k_2=K,\ k_1+k_2=2H.$$

因此，$k_i=H\pm\sqrt{H^2-K}$. 若其对应的特征矢是唯一确定的(即 $k_1\neq k_2$)，则特征矢的方向叫做**主方向**. $k_1=k_2$ 的点叫做**脐点**. 在前一情形，可以求得两族沿主方向的曲线. 这些曲线叫做**曲率线**.

8.4. 曲率线方程可以推导如下:

设 (u^1, u^2) 为坐标系，(du^1, du^2) 是其中一个主方向. 这样，由于主方向在球面映射下不变，(du^1, du^2) 必定和 $(l_j^1du^j, l_j^2du^j)$ 成比例. 故

$$\begin{vmatrix} du^1 & du^2 \\ l_j^1du^j & l_j^2du^j \end{vmatrix}=0.$$

展开，并用 (u, v) 而不用 (u^1, u^2) 表示，就得

$$l_1^2du^2+(l_2^2-l_1^1)dudv-l_2^1dv^2=0.$$

显然，在一个非脐点(当然也非平点)的邻近，可以引进参数，使曲率线成为参数曲线. 可以证明，参数曲线为曲率线的一个充要条件是 $F=M=0$.

8.5. 定义 设 (u, v) 为曲面在一点的切面上的直角坐标系，其原点在切点. 二次曲线

$$Lu^2+2Mdudv+Nv^2=\pm 1$$

叫做**杜潘 (Dupin) 标线**. 有以下几种情况.

1) 第二基本齐式是定齐式，即 $LN-M^2>0$. 这时上式只有一个符号可以确定实曲线，标线是椭圆. 在这样一点邻近，切面完全位于曲面的一侧;球面映射是 1—1 的而且保持定向.

2) 第二基本齐式是不定齐式，即 $LN-M^2<0$. 杜潘标线是两个共轭双曲线. 这时切面和曲面相交. 在这样一点邻近，球面映射是 1—1 的，而且颠倒定向.

3) $LN-M^2=0$.

a) $(L, M, N) \neq (0,0,0)$. 这时杜潘标线是两条平行线，因为方程左边是一个线性式的平方.

b) $(L, M, N) = (0,0,0)$. 杜潘标线不存在. 这样的点叫做**平点**. 这时对切面和曲面的关系不能作一般的结论，球面映射甚至可能不是 1—1 的.

8.6. 可以对主曲率给出更能显示其几何意义的解释. 已给曲面上一点以及在该点的切面上一个方向，这个方面和曲面在该点法线确定一个平面. 这平面和曲面交于一条平面曲线；可以证明，其曲率是

$$k = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\text{[1)]}.$$

k 是切面上那个方向的函数，而且可以证明 $|k| = \frac{1}{r^2}$，其中 r 是从切点到杜潘标线的距离. 因此，一般地，k 有一个极大值和一个极小值. 这些正好是特征值 k_1 和 k_2，而它们所出现的方向正是特征矢的方向. 例外情况发生在该点是脐点(或平点)时，那时一切方向都是特征方向. 在 2) 和 3a) 两种情况，确定渐近方向的是

$$Lu^2 + 2Muv + Nv^2 = 0.$$

8.7. 曲率K是通过球面象引进的，是作为平面曲率k的推广. 中曲率H也是k的自然推广；这时是通过在两点之间的曲线长的变分来推广的.

设 $\boldsymbol{X}$ 为平面上连接 a, b 两点的曲线，其长度为 $\mathfrak{L}$. 若令 $\boldsymbol{X}$ 变动，则象第 3 节那样，$\mathfrak{L}$ 的变化率是

$$\mathfrak{L}' = -\int_a^b \ddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}'ds + [\dot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}']_a^b.$$

设 $\boldsymbol{Y}$ 为曲线的幺法矢，τ 为曲线切线和正 x 轴所作的角，则

$$\dot{\boldsymbol{X}} = (\cos\tau, \sin\tau).$$

于是

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = k(-\sin\tau, \cos\tau) = k\boldsymbol{Y}.$$

---

1) 通常 k 称为曲面在该方向的法曲率. 严格地说，平面曲线的绝对值和 k 相同.
——译者注

由于 $\boldsymbol{X}'$ 可以写成

$$\boldsymbol{X}' = t\dot{\boldsymbol{X}} + n\boldsymbol{Y},$$

可见对于任意变分 X'

$$\mathfrak{L}' = -\int_a^b nk ds + [t]_a^b.$$

若 X' 是法向变分而变辐是 1,即 $t = 0$, $n = 1$,则

$$\mathfrak{L}' = -\int_a^b k ds.$$

若把上述论点移植到 E^3 里一个曲面 $\boldsymbol{X}$ 的一个域，其结果就用H表达．设 p 为变分的参数，$A(p)$ 表示变化了的面积．若 $\boldsymbol{X}'$ 为沿 p 变化方向的导数,则

$$\boldsymbol{X}' = n\bar{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{X}'\text{tang}.$$

可以证明

$$A' = -2\iint nHdA + \oint(\bar{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{X}', d\boldsymbol{X}),$$

其中 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ 表示矢量 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ 的行列式．若 $\boldsymbol{X}'\text{tang} = 0$, $n = 1$,则

$$A' = 2\iint HdA.$$

练习 推导上面关于 A' 的公式．

9. 两个基本齐式的关系

9.1. 定理 设由曲面X到曲面Y上有一个 1—1 的映射．设 (u, v) 为一个坐标系，在其中，映射的对应点为 $\boldsymbol{X}(u, v)$ 和 $\boldsymbol{Y}(u, v)$．于是，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的第一和第二两个基本齐式相同的充要条件是：该映射是一个正常运动．（在一个反射下，第一基本齐式相同而第二基本齐式变号．）

9.2. 定义 设 $Edu^2+2Fdudv + Gdv^2$ 和 $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ 为两个微分齐式．设 Γ_{ij}^k 的定义象 5.1 那样，则方程

$$L_v - M_u = \Gamma_{12}^1 L + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)M - \Gamma_{11}^2 N,$$
$$M_v - N_u = \Gamma_{22}^1 L + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1)M - \Gamma_{21}^2 N$$

叫做科达齐（Codazzi）方程．

9.3. 定理 已给两个齐式 $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ 和 $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$，以它们为第一和第二基本齐式的曲面存在的充要条件是:

1）$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ 是恒正的;

2）$LN-M^2=f(E,F,G)$，其中 f 是高斯的奇妙定理中的算子;

3）两个齐式满足科达齐方程(因此，科达齐方程基本上是两个齐式的可积条件)．

证明 我们将简述必要性的证明．1）和 2）是显然的，为了证明 3)，考虑公式

$$\boldsymbol{X}_{ij}=a_{ij}^{k}\boldsymbol{X}_{k}+l_{ij}\bar{\boldsymbol{X}}.$$

取它们和 X_h 的数积，得

$$\Gamma_{ij,h}=\boldsymbol{X}_{ij}\boldsymbol{X}_{h}=a_{ij}^{k}g_{kh}.$$

故 $a_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}$．因此

$$\boldsymbol{X}_{ij}=\Gamma_{ij}^{k}\boldsymbol{X}_{k}+l_{ij}\bar{\boldsymbol{X}}.$$

我们还知道 $\bar{\boldsymbol{X}}_i=-l_i^k\boldsymbol{X}_k$．现假设三阶导函数是连续的，$\boldsymbol{X}_{ijk}=\boldsymbol{X}_{ikj}=\boldsymbol{X}_{kij}$，等等．经过计算，可以证明这些方程恰好归结为科达奇方程和高斯奇妙定理．

10. 几 点 补 充

10.1. 我们已经看到第一基本齐式的系数 g_{ij} 是一个对称协变张量的分量;具体地说，若在一个坐标系中 $g=(g_{ij})$，而在另一坐标系中 $\bar{g}=(\bar{g}_{ij})$，则 $g=T'\bar{g}T$，其中 T 是坐标变换的雅科比方阵，T' 是 T 的转置．

但是第二基本齐式系数 l_{ij} 的情况有所不同．因为 $l_{ij}=\boldsymbol{X}_{ij}\bar{\boldsymbol{X}}$，若 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 经过坐标变换不变，则 l_{ij} 将是一个协变张量的分量，但按定义，坐标变换颠倒定向时，$\bar{\boldsymbol{X}}$ 变向． 一般地，若在一个坐标系中 $l=(l_{ij})$，而在另一个坐标系中 $\bar{l}=(\bar{l}_{ij})$，则 $l=\sigma_T T\bar{l}T'$，其中 σ_T 是 T 的行列式的符号．

现在，曲率K不受第二基本齐式这个性质的影响，但在颠倒定向的变换下，中曲率则变号，这是因为 $\mathrm{tr}(-l)=-\mathrm{tr}(l)$. 所以只有当正向已选定，即法线方向确定时，一个曲面的中曲率才能完全确定.

10.2. 在第 3 节中，我们证明了，可以引进参数，使

$$ds^2 = du^2 + g^2 dv^2.$$

另一个可以引进的有用参数系是正方参数系，它满足条件 $E=G$, $F=0$. 若在已给的一个坐标系中，

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

则在 E, F, G 是解析函数的假定下，可以简单地证明引进正方参数 u^*, v^* 的可能性，那时我们把 E, F, G 拓广到复域以得到证明. 这个定理在弱得多的条件下也是正确的，例如只须假定 E, F, G 有连续二阶导函数，但证明困难得多.

显然，这样一个从 u^*v^* 平面到曲面的映射保持角度不变，因而是保角映射. 这时，若方便的话，我们可以引进新参数

$$w = u^* + iv^*,\quad \bar{w} = u^* - iv^*.$$

10.3. 在曲面用 $z=z(x, y)$ 表示的特款，各基本量可以用显式表示. 设 p, q, r, s, t 依次表示 $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$，则

$$E = 1+p^2,\quad F = pq,\quad G = 1+q^2,$$

$$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

$$2H = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

第　二　章

关于微分几何中闭曲面的一些一般事实

关于本章里所涉及的拓扑学内容，Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie 可作为一般参考书.

1. E^3 里的简单闭曲面

1.1. 定义　E^3 里一个简单闭(即紧)曲面或二维流形是 E^3 里具有以下性质的点集 S:

1) S 是紧的(即有界而闭的).

2) S 是连通的.（紧集 S 不连通的条件是：$S = A \cup B$，其中 A 和 B 是非空紧集而且 $A \cap B$ 是空集).

3) 每一点 $p \in S$ 有一个和平面上一个圆盘内部同胚的邻域 $N(p) \subset S$.

若除此以外，S 还满足以下条件，则称为可微的:

4) 设 $N(p)$ 为满足上面条件 3) 的邻域，并令其中的同胚映射为

$$\boldsymbol{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

这里面，(u, v) 为平面的直角坐标，而 x, y, z 为 E^3 里的直角坐标，则 x, y, z 是可微的，而且

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2.$$

5) 若 $r \in N(p) \cap N(q)$，其中 $N(p)$ 和 uv 平面上一个圆盘同胚，$N(q)$ 和 $\bar{u}\bar{v}$ 平面上一个圆盘同胚，则 $N(p)$, $N(q)$ 之间的对应 $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ 是来回可微的，因而在 r 点，

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

1.2. 定理 (Jordan-Brouwer). 若 S 为 E^3 里简单闭曲面，则 $E^3\backslash S = I \cup E$，其中 I 和 E 满足:

1) I 和 E 是连通的非空开集；

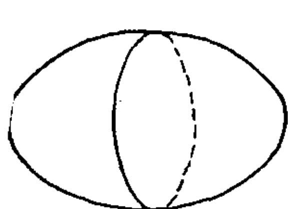
2) $I \cap E$ 是空集；

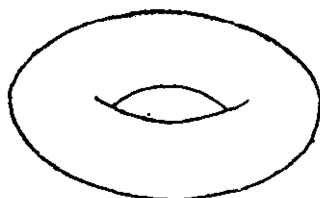
3) I 是有界的；

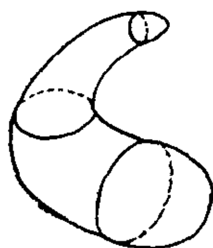
4) E 是无界的

I 叫做 S 的**内部**，E 叫做**外部**.

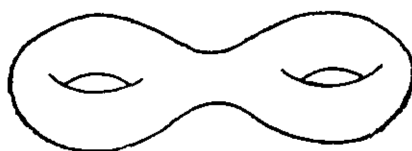
1.3. 定理 若 S 是 E^3 里的简单闭曲面，则 S 和如下图的一个带 g 个环柄的球面同胚 ($g \geqslant 0$). g 叫做曲面的**亏格**.

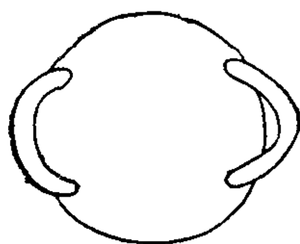






带零个环柄的曲面　　带一个环柄的曲面





带两个环柄的曲面

2. 抽象闭曲面

2.1. 定义 一个抽象闭曲面是满足第二可数公理的豪斯多夫(Hausdorff)空间 S，它还满足 1.1 中的条件 1),2),3). 若 1.1 的条件 5) 也满足,则曲面称为可微的.

设 S 为可微曲面而 f 是 S 上的实值函数. 设 $p\in S$, 而 $N(p)$ 和 uv 平面上一个圆盘同胚，其中 p 对应于 $(0,0)$. 若 $f(u, v)$ 在 $(0,0)$ 可微，则 f 叫做在 p 可微的. 这个概念显然不受可微坐标变换影响.

2.2. 定义 已给一个抽象可微闭曲面，若可以选择它的一切参数圆盘，使得 1.1 的条件 5) 中的雅科比行列式都是正的，则该曲面称为可定向的.

若曲面是欧氏空间的一个子集,则一个等价条件是,可以对曲面的切面规定协同的定向. 由于在 P 点的切面的定向确定 P 的邻域的定向，这就等价于要求两个邻域在它们的交集内所规定的定向相同.

2.3. 定理 E^3 里一个简单闭曲面是可定向的.

证明(概略) 直觉地容易看出，这是正确的. 因为根据 1.2，在曲面每一点可以选取指向内部的那个法矢. 若对 E^3 选定了一个定向,就可以规定在每一点的切面的定向,使它同内向法矢在一起,和 E^3 的定向一致. 用这个方法显然可以得到整个曲面的协同的定向.

2.4. 定理 一个可定向的抽象闭曲面和 E^3 里一个简单闭曲面同胚,因而根据 1.3,和一个带 g 个环柄的球面同胚 $(g\geq 0)$. 但是下面的例表明,存在着不可定向的抽象闭曲面.

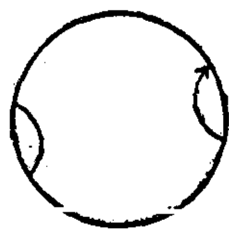
2.5. 例 **实射影平面** 设 (u, v, w) 为 E^3 里的直角坐标系，令 P 为 $(0,0,0)$ 点. 设 L 为平面 $w=1$. 于是每一条经过 P 而不平行于 L 的直线确定 L 上唯一的一点;倒转来，L 上每一点确定经过 P 而不平行于 L 的唯一的一条直线. 事实上 (u, v, w) 可以看作点

$$(u, v, 1)=\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}, 1\right)\in L$$

的齐次坐标. 显然，平行于 L 的直线对应于射影平面 L 上的无穷远点，即具有齐次坐标 $(u, v, 0)$ 的点. 所以，实射影平面的点同以 E^3 里一点为中心的线把的直线 1—1 对应. 这个线把中的直线和一个二维球面上的对极点偶有自然的 1—1 对应. 这些点偶的集合和上半球面的点 1—1 对应，但须把半球面的边界（即赤道）上的对极点粘合.

在上述作法中，若取以 P 为中心的幺球面作为二维球面，则在第一个对应关系中，射影平面上齐次坐标为 (u, v, w) 的点对应于点偶 $\left(\frac{u}{n}, \frac{v}{n}, \frac{w}{n}\right)$, $\left(-\frac{u}{n}, -\frac{v}{n}, -\frac{w}{n}\right)$, 其中 $n=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$; 而在第二个对应中，当 $w\neq 0$ 时，它对应于 $\left(\frac{u}{n}, \frac{v}{n}, \frac{|w|}{n}\right)$, 当 $w\neq 0$ 时，它对应于 $\left(\frac{u}{m}, \frac{v}{m}, 0\right)$ 和 $\left(-\frac{u}{m}, -\frac{v}{m}, 0\right)$, 其中 $m=\sqrt{u^2+v^2}$.

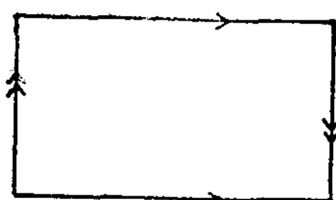
这最后的点集显然和平面上一个圆盘同胚，但须把圆盘边界上在一条直径两端的点粘合. 对于圆盘内的点，其邻域可以采用欧氏平面的普通邻域；对于边界点，可以取两个半圆盘如图.



由这最后的模型，可以明显地看出射影平面是不可定向的. 因为，若在中心确定一个定向，则在一切内点，都有确定的定向. 但对于一个边界点，则由于粘合了直径两端，从内部沿不同方向趋于这一点，就得到相反的定向.

2.6. 克莱因 (Klein) 瓶 一个克莱因瓶可以用一个长方形来表现，但其对边相粘合如图 (1). 图 (2) 表示 E^3 里克莱因瓶的模型，但它和自己相交.

2.7. 定理 一个不可定向的抽象闭曲面或者和一个带 P 个环



(1)



(2)

柄 (p ≥ 0) 的射影平面或和带 p 个环柄 (p ≥ 0) 的克莱因瓶同胚.

3. E^3 里的一般闭曲面

3.1. 定义 设 S_0 为具有可微结构的抽象闭曲面. 设 $\boldsymbol{X}$ 为由 S_0 到 E^3 内的可微映象;即

$$\boldsymbol{X}(\mathrm{p})=(x(\mathrm{p}), y(\mathrm{p}), z(\mathrm{p})),$$

其中 $x(\mathrm{p}), y(\mathrm{p}), z(\mathrm{p})$ 是 S_0 上的可微函数, 而且对于局部参数 u, v,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}=2.$$

这时 $\boldsymbol{X}$ 就叫做 E^3 里的一般闭曲面. 严格地说, 一个一般闭曲面是一个有序偶 $\{S_0, \boldsymbol{X}\}$. 但若 $S=\boldsymbol{X}(S_0)$ 是 S_0 在 $\boldsymbol{X}$ 下的象, 在不会引起混乱的情况下, 我们也把 S 叫做一般闭曲面.

关于秩的条件表明, X 是局部 1—1 的, 但 S_0 的象可能自己相交. 根据 2.3, 若 S_0 是不可定向的, 它在 E^3 里的象必然自交.

3.2 定理 每一个不可定向闭曲面可以可微地, 局部 1—1 地嵌入 E^3, 成为一般闭曲面.

证明. 2.6 中的图 (2) 表示克莱因瓶在 E^3 内的这种嵌入. 博艾 (Boy) 曲面是射影平面在 E^3 内的嵌入. 关于博艾曲面的描述, 可参考 Hilbert-Cohn-Vossen, Geometry and the Imagination[1]. 根据 2.7, 一切其他不可定向闭曲面都是这两个曲面之一添上环柄.

1) 即 Anschauliche Geometrie.——译者注

3.3. 问题 上面所说的嵌入概念，从几何观点看是必要的，因为克莱因瓶和射影平面在 E^3 内的嵌入还没有已知的显式来表达. 对于射影平面，例如可以尝试通过二维球面上三个偶函数，其雅科比矩阵的秩为 2 的，来达到这个目的. 有人猜想认为可以通过偶次的齐式. 但是，已经证实，用二次齐式不行，并且有猜想认为用四次齐式也不行.

至于在 E^4 内的嵌入，则在 Hilbert-Cohn-Vossen 的书中，给出了射影平面在 E^4 内的参数表示式. (但那里所列的，消去参数后的曲面方程却不正确，因为(用他们所采用的记号)平面 $z=t=0$ 也满足那些方程.)一般地，若 M^k 是 k 维不可定向流形，就不可能通过 $n-k$ 个方程

$$f_i=0,\ i=1,2,\cdots,n-k,$$

把它在 E^n 里表示，其中 f_i 的雅科比矩阵具有最大的秩. 证明这个事实的思路是：如果这样的方程存在，则在每点 f_i 的梯度将是独立的，因而确定 M^k 的一个定向，而这样就有了矛盾.

3.4. 声明 在以下讲演中，我们将限于可定向曲面.

4. 黎 曼 几 何

4.1 设 S_0 为抽象闭曲面. 若在 S_0 上规定一个二阶对称协变张量 g_{ij}，使得齐式 $g_{ij}du^idu^j$ 是恒正的，则在 S_0 上确定了一宗黎曼几何. 根据 2.4 和 3.2，每一个抽象闭曲面 S_0 可以在 E^3 内表现为一般闭曲面，所以，若把 S_0 看作 E^3 里的一个子集，则在它上面诱导出的度量就可以作为抽象曲面上的黎曼度量的例. 于是就有一个问题：这种度量是不是唯一的可能？即：在一个抽象曲面 S_0 上已给一宗黎曼度量 g_{ij}，能否把 S_0 等距地嵌入 E^3，以成为 E^3 里的一般闭曲面？下面的定理和例表明，其答案是否定的！

4.2. 定理 设 S 为 E^3 里的一般闭曲面，则在 S 上存在着一点 p，在那里 $K(\mathrm{p})>0$.

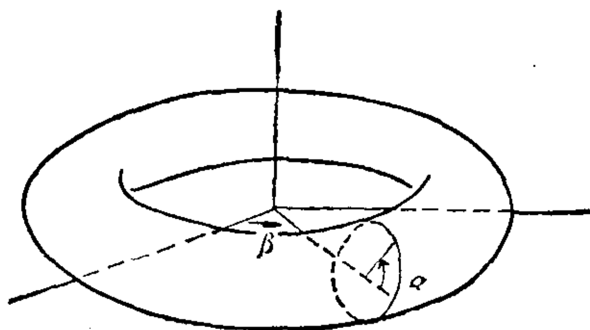
证明 由于 S 是紧的，以一个已给点为中心，可以作半径 R 最小的球面，把 S 包含在内；于是球面和 S 至少在一点相切. 在这样

的切点，S 的曲率≥球面的曲率>0.

练习 对于 E^3 里每一个一般曲面 S，证明 $\iint_P KdA \geqslant 4\pi$，其中 $p\subset S$ 是 S 上 $K>0$ 处的点集.

4.3. 例 设 S_0 为回转圆环面，α 和 β 为参数如图. 令

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$



则 $K=0$，因为在这个度量下，S_0 局部地和欧氏平面一样. 故根据 4.2，S_0 不能等距地嵌入 E^3. 但是 S_0 可以等距地嵌入 E^4；函数

$$x_1 = \cos\alpha,\quad x_2 = \sin\alpha,\quad x_3 = \cos\beta,\quad x_4 = \sin\beta$$

就确定这样一种嵌入法；因为

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

这个反例，因为用了曲率 K，只适用于三次可微(即 C^3 类)的等距嵌入问题.

4.4. 在上面的例中，我们看到所给度量可以在 E^4 中实现. 一般地，已经知道，一个满足第二可数公理的 k 维紧豪斯多夫空间可以同胚地嵌入 E^{2k+1}. 若那个空间还是一个流形，则可以在 E^{2k} 里实现同胚嵌入. 因此，任意抽象闭曲面可以同胚地嵌入 E^4，但问题仍然是，是否每一个黎曼度量都能在 E^3 里实现？ J. Nash 证明了，如果我们满足于 C^1 嵌入，这是可以的(见 Annals of Mathematics, **60**(1954), p. 383—396). 他的结果可以归纳如下:

若一个 n 维抽象微分流形 M^n 有一个 C^∞ 类的同胚嵌入到 E^k，$k\geqslant n+1$，则 M^n 上的每一个 (C^∞ 类的)黎曼度量可以实现在 E^k 里的一个 C^1 类简单闭流形上.

Nash 还获得了关于 C^∞ 类等距嵌入的一些结果(见 Annals of

Mathematics, **63**(1956), p. 20—63),但关于维数的上界很差. 他的主要结果是:

若 $3\leqslant k\leqslant\infty$,一个具有 C^k 类正度量的 n 维紧流形在 $\frac{n}{2}(3n+11)$ 维欧氏空间里有一个 C^k 类嵌入.

对于 $k=2$ 的情况,没有给出确定的结果.

第　三　章

具有黎曼度量的闭曲面的总曲率和关于线素场奇点的庞加莱定理

1. 曲线族的奇点

1.1. 定义 曲面 S 上的一个非零切矢确定曲面上的一个线素．这个矢的一切非零倍数确定同一个线素．因此，线素不分正负向．严格地说，一个线素是切矢空间的一个一维线性子空间．

一个域内的一个正则(可积)线素场对应于该域内一族曲线，在域内每点的线素和经过该点的曲线相切．

若在一个域内，除单独一点 p 外，有一个处处正则的线素场，而且该场不能(唯一地)连续拓广到 p，则 p 是该场的一个奇点．

1.2. 定义[1] 一个孤立奇点的指数 i 定义如下．设 p 为一个线素场的一个孤立奇点而 $\boldsymbol{C}$ 是具有如下性质的简单闭线：

1）在 $\boldsymbol{C}$ 的内部，p 是唯一的奇点；

2）$\boldsymbol{C}$ 上没有奇点．

则所给场在 $\boldsymbol{C}$ 上诱导出一个线素场 $\boldsymbol{F}$． 设 $\boldsymbol{C}$ 是用一个以 t 为参数的函数确定的：$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}(t), 0\leqslant t\leqslant 1$．在 $\boldsymbol{C}(0)$，选定线素两个方向中的任意一个．于是，通过连续性，对于每一个 $t, 0\leqslant t\leqslant 1$，在 $\boldsymbol{C}(t)$ 都有一个方向．我们要考察，绕 $\boldsymbol{C}$ 一周[2]后，线素场方向的总变化．为此，我们需要有一个度量角度的参考系统．暂时假定 $\boldsymbol{C}$ 是充分地小，小到可以含在一个固定局部坐标系所适用的域内．在这个域内，我们可以取一个无奇点的线素场，例如通过参数曲线 $v=$ 常数．这线素场在每一点确定一个方向 $\boldsymbol{U}$．设 $\measuredangle[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}]$ 为

1）假定曲面 S 具有黎曼度量而且是可定向的．——译者注

2）沿 $\boldsymbol{C}$ 的正向．——译者注

所选的 $\boldsymbol{F}$ 方向和 $\boldsymbol{U}$ 方向之间的角，而令 $\delta_C \measuredangle[\boldsymbol{U},\boldsymbol{F}]$ 为绕 $\boldsymbol{C}$ 一周后这个角的总变化．令

$$2\pi j = \delta_C \measuredangle[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}].$$

容易看出 $j=\frac{n}{2}$，其中 n 是一个整数．

1.3. 定理　j 和 $\boldsymbol{U}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 都无关．这样，上面定义中把 $\boldsymbol{C}$ 限制在小域里就是不必要的了．

证明　1）设 $\boldsymbol{V}$ 是另一个无奇点的场，则

$$\delta_C \measuredangle[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}] = \delta_C \measuredangle[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}] + \delta_C \measuredangle[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{F}].$$

但当 $\boldsymbol{C}$ 选得充分小时，可令 $\delta_C[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}]$ 任意小，因为 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 都是没有奇点的连续场．但 $\delta_C[\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}]$是 π 的整数倍，故 $\delta_C[\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}]=0$.

2）由于 $\frac{1}{\pi}\delta_C$ 连续地依赖于 $\boldsymbol{C}$，而 $2j$ 是整数，显然 j 与 $\boldsymbol{C}$ 无关．

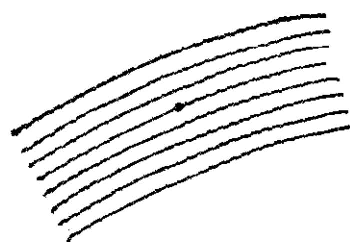
1.4. 定理　若 ds^2 是一个黎曼度量而 1.2 中的角是根据这个度量确定的，则指数与所采用的度量无关．

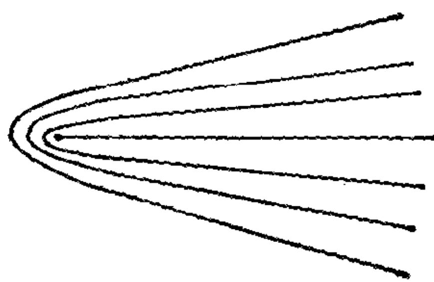
证明　设 (g_{ij}) 和 (h_{ij}) 为两个黎曼度量的恒正齐式的方阵，则

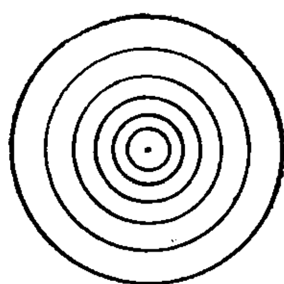
$$f_{ij}(t) = (1-t)g_{ij} + th_{ij},\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

也是恒正的，因而对于每个 t，它确定一个黎曼度量，而 $2j$ 是整数．故 j 与度量无关．

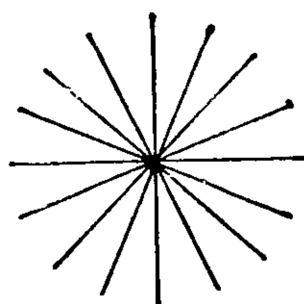
1.5. 例　下面的例说明，对于每个 $j=\frac{n}{2}$，总有一个具指数 j 的奇点．


(1) 无奇点，$j=0$

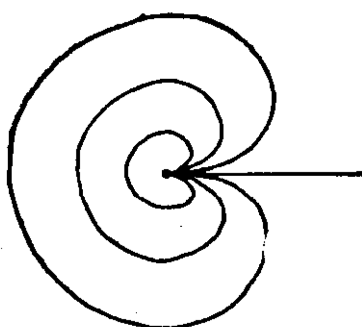

(2) $j=\frac{1}{2}$



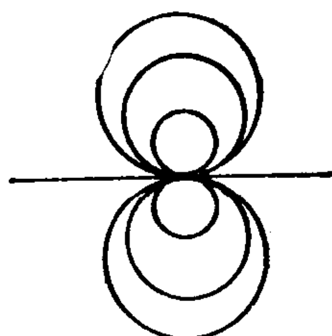
(3) $j=1$



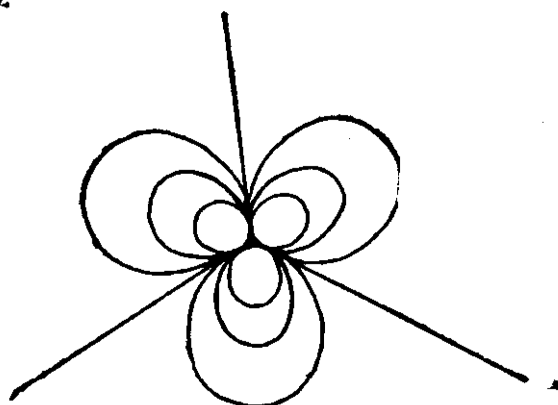
(4) $j=1$



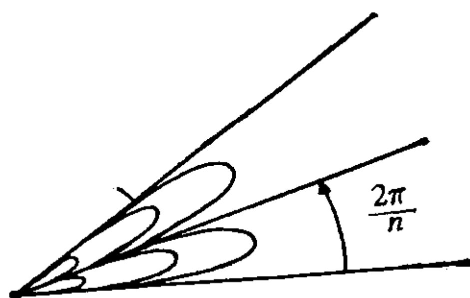
(5) $j=\frac{3}{2}$



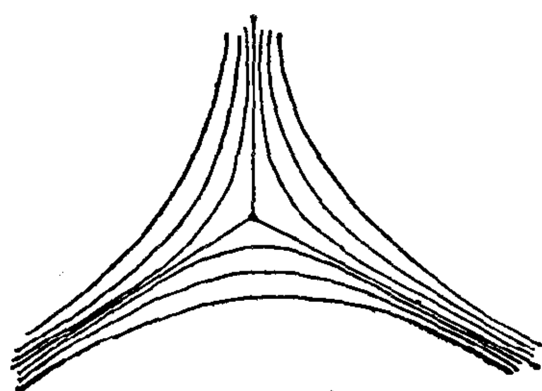
(6) $j=2$



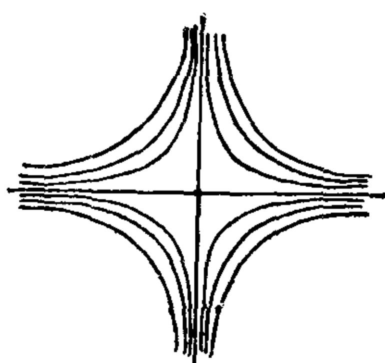
(7) $j=\frac{5}{2}$



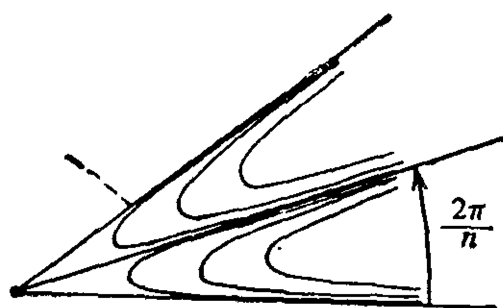
(8) $j=\frac{n+2}{2}$, $n\geqslant 1$



(9) $j=-\frac{1}{2}$



(10) $j=-1$



(11) $j=\frac{2-n}{2}$, $n\geqslant 1$

1.6. 定义 在一个 g 亏曲面上总有一个线素场，它有有限多个奇点，而且奇点指数和是 $2-2g$.

证明 我们将分别描述具有这个性质的可微场.

1a) $g=0$. 取经过两极的一族大圆. 有两个象 1.5 中的 (4) 那样的，指数为 $+1$ 的奇点. 故

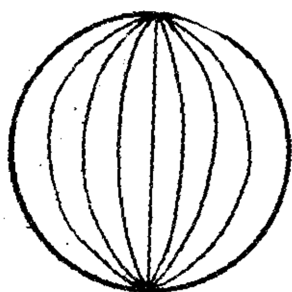
$$\sum j=2=2-2\cdot 0.$$

1b) $g=0$. 平面上一族平行直线的球极射影. 在北极有一个象 1.5 中 (6) 那样，指数为 $+2$ 的奇点.

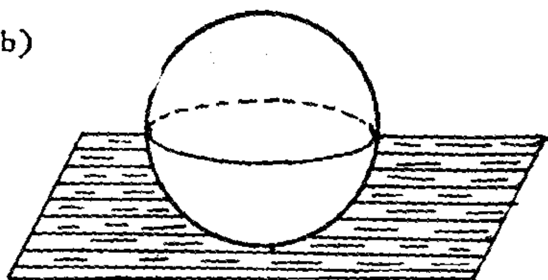
1c) $g=0$. 取水平线 $z=$ 常数. 有三个象 1.5 中 (3) 那样，指数为$+1$的奇点，一个象 1.5 中 (10) 那样，指数为-1的奇点. 故

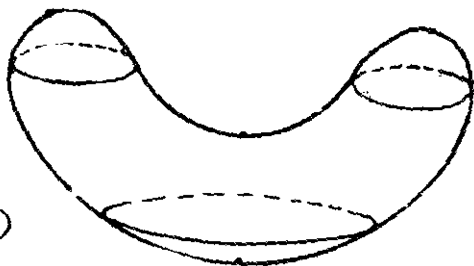
$$\sum j=2.$$

1a)



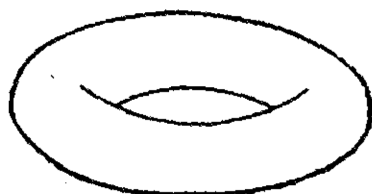
1b)





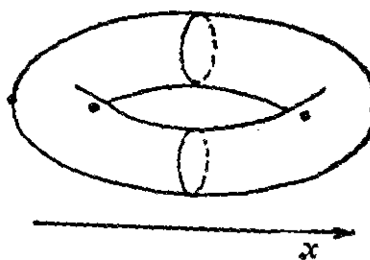
1c)

z

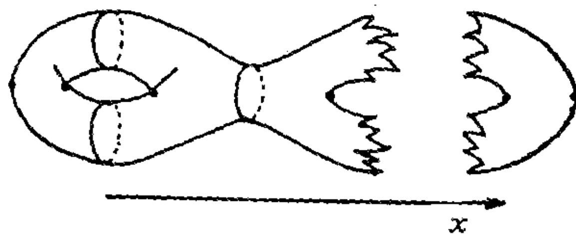


2a)

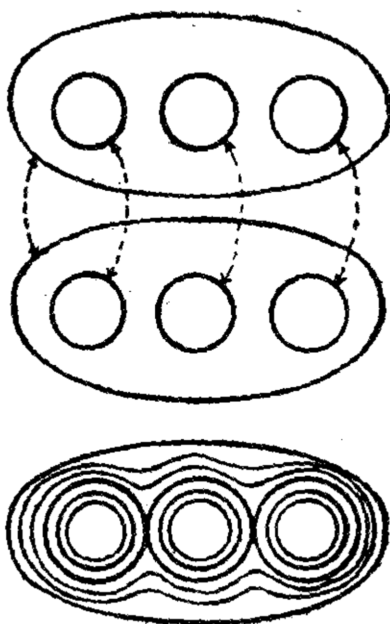
2b)



3a)



3b)



2a) $g=1$. 取回转圆,无奇点, $\sum j=0=2-2\cdot 1$.

2b) $g=1$. 取曲线 $x=$ 常数. 有两个象 1.5 中 (3) 那样,指数为 $+1$ 的奇点,两个象 1.5 中的 (10) 那样,指数为 -1 的奇点. 故 $\sum j=0$.

3a) 对于任意 g,若曲面嵌入 E^3 如图. 取曲线 $x=$ 常数. 有 $2g$ 个象 1.5 中 (10) 那样,指数为 -1 的鞍点,两个象 1.5 中(3) 那样,指数为 $+1$ 的奇点. 故 $\sum j=2-2g$.

3b) 若曲面是作为两个平面图形的边界粘合而成的如图, 则所示的场有 $2(g-1)$ 个象 1.5 中 (10) 那样,指数为 -1 的奇点. 故 $\sum j=2-2g$.

练习 在一个 $g\geqslant 2$ 亏曲面上, 作一个恰好有一个奇点的线素场.验证奇点指数是 $2-2g$. (这个奇点可以象 1.5 中图 (11) 那样,但也不必须是那样.)

1.7. 一点历史 庞加莱原来研究具有以下形状的微分方程的奇点:

$$a(u, v)du+b(u, v)dv=0.$$

若 a 和 b 有一个公共零点,则在该点邻近,积分曲线就类似 1.5 中的一些图. 例如

a) $udu+vdv=0$ 给出图 (3);

b) $vdu+udv=0$ 给出图 (10);

c) $vdu-udv=0$ 给出图 (4).

但是容易看出, 不是 1.5 的图都对应于这类的微分方程, 因为在 $adu+bdv=0$ 的一条积分曲线上, 矢量 (a, b) 是曲线的法矢, 但 (a, b) 是具有确定方向的矢量. 因此, 绕 $\boldsymbol{C}$ 一周后, 它必然变动了 $n\cdot 2\pi$,其中 n 是一个整数. 所以 j 的半(非)整数值不对应于上述那样的微分方程.

2. 主 要 定 理

2.1.定理 I 设 S 为可定向的 g 亏闭曲面, 在它上面有一宗黎

曼度量，因而有确定的曲率 K. 设在 S 上有一个至多有有限多个奇点的线素场 $\boldsymbol{F}$,则奇点指数之和 j 是确定的,而且

$$\iint_S KdA = 2\pi\sum j.$$

证明 若 $\boldsymbol{C}$ 为 S 上一个简单弧，它上面不含有 $\boldsymbol{F}$ 的奇点，则 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上诱导出一个方向场 $\boldsymbol{F_C}$.若 $\boldsymbol{Z_C}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的一个平行场,令

$$\Phi(\boldsymbol{C}) = \delta_C \measuredangle[\boldsymbol{Z_C}, \boldsymbol{F_C}].$$

显然，已给 $\boldsymbol{C}$ 和已给黎曼度量，$\Phi(\boldsymbol{C})$ 只决定于 $\boldsymbol{C}$ 而与所选的平行场无关．由于一个平行场的定义与 $\boldsymbol{C}$ 描绘的方向无关，若 $-\boldsymbol{C}$ 表示沿 $\boldsymbol{C}$ 的相反方向描绘的曲线,则

$$\Phi(-\boldsymbol{C}) = -\Phi(\boldsymbol{C}).$$

在曲面论中，人们熟知的一个定理是，曲面可以重分为二维腔,而二维腔则是平面上一个闭腔的拓扑象．显然,可以把曲面重分,使得:

1) 在任意腔的边界上没有 $\boldsymbol{F}$ 的奇点；

2) 每一个腔含有至多一个奇点；

3) 每一个腔可以用一个短程参数系覆盖.

用 $Y_1, Y_2, \cdots$ 表示这些腔，用 $j(Y)$ 表示 Y 里的奇点指数(当 Y 里没有奇点时，$j(Y) = 0$).

设 Y 为固定腔，$\boldsymbol{U}$ 为相应的短程坐标系里短程线的方向，$\boldsymbol{b}(Y)$ 为 Y 的边界,则根据 1.2 和 1.3,

1) $$2\pi j(Y) = \delta_{b(Y)} \measuredangle[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}].$$

但是,在 I, 6.2 中,我们知道,若 Z 是 $\boldsymbol{b}(Y)$ 上一个平行场,则

$$\iint_Y KdA = \delta_{b(Y)} \measuredangle[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{Z}].$$

这可以写成

2) $$-\iint_Y KdA = \delta_{b(Y)} \measuredangle[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{U}].$$

把 1) 和 2) 相加,得

$$2\pi j(Y) - \iint_Y KdA = \delta_{b(Y)} \measuredangle[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{F}]$$

$$= \sum_{C_i \in b(Y)} \Phi(C_i),$$

其中 C_i 表示 $b(Y)$ 上的弧，而总和则是对这一切 C_i 取的. 若对于一切二维腔 Y_k 取和，则得

$$2\pi \sum j - \iint_S K dA = 0;$$

因为每个弧 C_i 刚好在两个 Y_k 的边界上，一次作为 $+C_i$，一次作为 $-C_i$.

这就是所求的结果.

2.2. 定理 II (庞加莱) 若 F 是 S 上至多有有限多个奇点的线素场，则

$$\sum j = 2 - 2g,$$

其中 g 是 S 的亏格.

证明 由于 $2\pi\sum j = \iint_S K dA$ 而 $\iint_S K dA$ 与场无关，对于一切至多有有限多个奇点的场，$\sum j$ 是相同的. 但在 1.6 里，我们给出了 $\sum j = 2 - 2g$ 的例，所以对于一切这样的场，定理中的等式成立.

2.3. 定理 III (曲率积分) 若 S 是具有黎曼度量的一个可定向的 g 亏闭曲面，则

$$\iint_S K ds = 2\pi(2 - 2g).$$

证明 根据 1.6，在 S 上有一个至多只有有限多个奇点的线素场. 故根据 2.1 和 2.2，就可以推得此定理.

2.4. 应用

a) $g = 0$，则 $\iint_S K dA = 4\pi$. 若 P 是 $K > 0$ 处的点集，则 $\iint_P K dA \geqslant 4\pi$.

a₁) 在这样一个曲面上的任意场至少有一个奇点；而且若它

至多有有限多个奇点，则至少有一个奇点有正指数。

b) $g=1$，则 $\iint_S KdA=0$。这是可能确定一个 $K=0$ 的黎曼度量的唯一情况，也是可能确定一个没有奇点的线素场的唯一情况。

c) $g\geqslant 2$。任意线素场都至少有一个奇点。若至多有有限多个奇点，则至少有一个奇点有负指数。

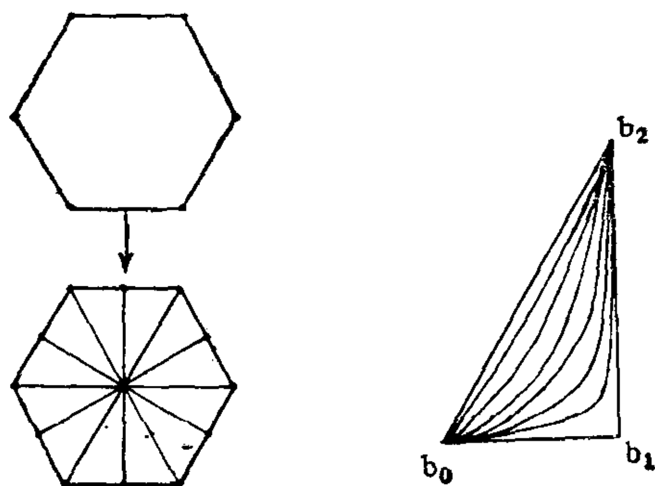
d) g 很大，则在曲面的大部分，K 是负的。

2.5. 欧拉公式 设 S 为一个可定向闭曲面，它被重分成二维腔。设

$$a_0= \text{顶点数},$$
$$a_1= \text{棱数},$$
$$a_2= \text{二维腔数},$$

则 $a_0-a_1+a_2=2-2g$。（这个结果下面不需用。）

证明 我们将构造一个场，在那里，$a_0-a_1+a_2=\sum j$ 显然成立，则定理也就证明了。对于所给重分作重心重分如下：作为顶点，除原有顶点外，在每条棱上取一个内点，在每个腔里取一个内点，再取新棱如图。在重心重分的每个三角形里，构造一个场如图，其中 b_0 是一个原有顶点，b_1 是一个原有棱的内点，b_2 是一个原有二维腔的内点。于是，在 b_0 和 b_2，各有一个象 1.5 中 (4) 那样，指数为 $+1$ 的奇点，而在 b_1，则有一个象 1.5 中 (10) 那样，指数为



-1 的奇点．但每个 b_0 对应于一个原有顶点，每个 b_1 对应于一个原有棱，而每个 b_2 对应于一个原有二维腔．故

$$\sum j = a_0 - a_1 + a_2 = 2 - 2g.$$

记号 在欧拉公式出现的曲率积分，即庞加莱定理 2.2 里出现的数 $\chi = 2 - 2g$，叫做曲面的**示性数**．

3. 球面映射的度数

3.1. 定义 设 $\{S_0, \boldsymbol{X}\}$ 为 E^3 里一般可微闭曲面（参看第二章，3.1），其中 S_0 是可定向的；设 $S = \boldsymbol{X}(S_0)$． 这样，对应于每点 $p_0 \in S_0$，曲面 S 在其对应点 $p = \boldsymbol{X}(p_0)$ 有完全确定的法矢．这个法矢的方向确定 E^3 里幺球面 Σ 上一点 $f(p_0)$，作为 p_0 的球面象（参看第一章，7.2）．这个映射 $f: S_0 \to \Sigma$ 叫做 $\{S_0, \boldsymbol{X}\}$ 的**球面映射**．

设 K 为 S 的高斯曲率而 dA 为 S 的面积元素，至于 S 上的黎曼度量，则是通过嵌入映射 $\boldsymbol{X}$ 引导出来的．于是 K 和 dA 依次可以作为参数曲面 S_0 的高斯曲率和面积元素． 这样，根据第一章，7.2，$d\Omega = KdA$ 是 Σ 上 $f(S_0)$ 的面积元素（按 Σ 的普通球面度量）．由于在 S_0 上，我们总假定 $dA > 0$，$d\Omega$ 的符号确定于 K 的符号．若 R_0 是 S_0 上，$K > 0$ 的一个域，我们就说，在 f 下，R_0 正覆盖 Σ．同样，若在 R_0 上，$K < 0$，我们说，R_0 负覆盖 Σ． 由于 S_0 上 $K = 0$ 的点集的球面象面积是 0，

$$\iint_{S_0} KdA = \Omega,$$

其中 Ω 是 $f(S_0)$ 的代数面积，即 Σ 被正覆盖面积之和减去被负覆盖面积之和．由 $\iint_{S_0} KdA = (1-g)4\pi$，可知

$$\Omega = (1-g)4\pi.$$

由于 4π 是 Σ 的面积，$1-g$ 代表 Σ 被 $f(S_0)$ 覆盖的代数面积的比值．

3.2. 定义 设 $q \in \Sigma$ 满足以下条件：

1） q 是 S_0 有限多个点 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 在 f 下的象；

2） 在每点 q_i，$i = 1, 2, \cdots, m$，的一个邻域内， f 是 1—1

的.

这时我们说，q 对于 f 处于一般位置.

若 q 对于 f 处于一般位置，设 $P(q)$ 为 q 的一个邻域被正覆盖的次数，$N(q)$ 为被负覆盖的次数. 令 $d(q) = P(q) - N(q)$.

3.3. 定理 若 q 和 q′ 都处于一般位置，则

$$d(q) = d(q') = d.$$

证明[要点] 为了浅显地说明 $d(q)$ 是常数，我们推理如下. f 实质上确定 S_0 作为$\sum$的一个覆盖曲面，因而 $f(S_0)$ 可能有(分)支点或折(叠)线. 若 q 和 q′ 是两个处于一般位置的点，它们可以用一条避开支点的弧相连. 沿这条弧，P 和 N 都是常数，除非在它跨过一条折线时. 但在跨过一条折线时，P 和 N 或同时增 1 或同时减 1. 故 $P-N$ 不变. 下面定理表明 d 和嵌入函数 $\boldsymbol{X}$ 无关.

3.4. 定义 $d = P - N$ 叫做 f 的度数.

定理 一般 g 亏闭曲面的球面映射的度数 $d = 1 - g$.

证明 在 3.1 里，我们看到，$1-g$ 是$\sum$被 $f(S_0)$ 覆盖的比值. 但 d 显然也是$\sum$被 $f(S_0)$ 覆盖的比值，故

$$d = 1 - g.$$

3.5. 上面所介绍的关于度数的定义，即 $d = P - N$，可以通过点集拓扑的概念加以严密化.（这是 Brouwer 原来给的定义.）但通过代数拓扑的概念，可以较容易给出一个严密定义如下.

设 M^n 和 N^n 为两个 n 维流形，f 为由 M^n 到 N^n 内的连续映射，则 f 诱导出由 M^n 的 n 维同调群到N的 n 维同调群的一个同态映射 f_*. 设 μ 和 ν 依次为 M^n 和 N^n 的 n 维同调群的生成元，则 $f_*(\mu) = d \cdot \nu$，其中 d 是整数，称为 f 的度数[1].

3.6. 定理 若 S_0 是 E^3 里一个简单闭曲面，则 $f(S_0)$ 覆盖整个$\sum$. 若 S_0 是一个一般闭曲面而 $g \neq 1$，则 $f(S_0)$ 也覆盖整个$\sum$.

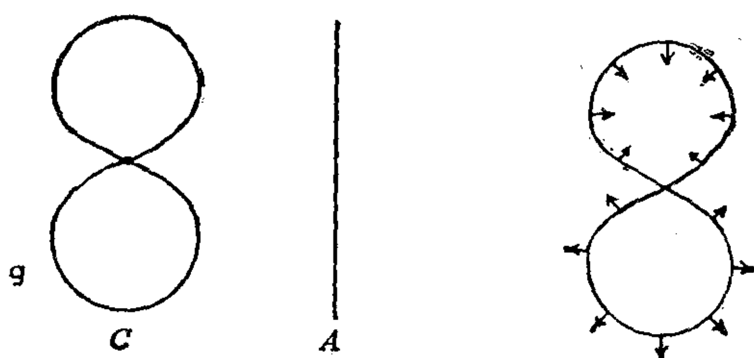
证明 若 S_0 是 E^3 里一个简单闭曲面，取它向内的法矢为法矢，则$\sum$上任意一点 P 是被覆盖的，因为必有一个平面垂直于 P 所

1) 这一段原文疑有误，经译者改写. ——译者注

确定的方向并且在 S_0 外和 S_0 相切.

若 S_0 是一个一般闭曲面,则从上述考察可以看出,在 Σ,每一对对极点中,至少有一个是被覆盖的. 若 $g \neq 1$,则 $d \neq 0$,因而每一点是被覆盖的;因为如有些点完全不被覆盖,则 $P-N=0$,这就有矛盾.

注记 若 $g=1$,上面定理不成立. 考虑令曲线 C 绕 A 轴回转所产生的曲面. 这是 E^3 里的一个一般 g 亏闭曲面. 但如右图所显示的法矢总不指向上方,因而北极的一个邻域不被覆盖.



4. 到高维的推广

4.1. 欧拉数,庞加莱数,指数 设 P^n 为已重分为单形的 n 维多面体. 设 a_r 为 r 维单形数而 p_r 为第 r 贝蒂(Betti)数,则欧拉数是 $\sum\limits_0^n(-1)^r a_r$. 庞加莱数是 $2-2g$ 的推广,等于 $\sum\limits_0^n(-1)^r p_r$.

欧拉-庞加莱恒等式是

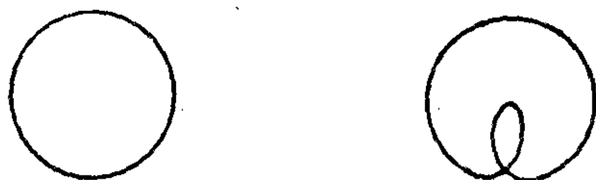
$$\sum(-1)^r a_r=\sum(-1)^r p_r.$$

这个数叫做 P^n 的示性数 χ.

此外,若 P^n 是一个微分流形,则可以考虑 P^n 上的矢场,并给出这些矢场奇点的指数定义. 可以证明,对于每一个至多有有限多个奇点的场,$\sum j=\chi$.

4.2. 度数 设 M^n 为 E^{n+1} 里一个可定向的一般 n 维闭微分流形,则可以给出球面映射及其度数的定义. 是否 $d=\frac{1}{2}\chi$? 对

于平面上的圆，它不成立，因为这时 $d=2$ 而 $\chi=0$. 又，d 也不是与嵌入映射无关，因为对于右边那个图，$d=2$。



定理 若 n 是偶数，则 $d=\frac{1}{2}\chi$. 若 n 是 >1 的奇数，则存在着同胚而有不同度数的简单闭流形。

4.3. 高斯曲率 若 n 是偶数而在 M^n 上确定了一宗黎曼度量，则可以确定一个通过第一基本张量表示的纯量函数 K，使得 $C_n\int\cdots\int KdV=\chi$，其中 C_n 是依赖于 n 的常数。这是 Allendoerfer, Weil 和陈省身所确立的。若 n 是奇数，则 $\chi=0$，故这样的公式不能存在。

第　四　章

卵形面的阿达马特征

1. E^3 里的卵形面

1.1. 定义　若 p 和 q 是 E^n 里的点，用 $\overline{pq}$ 表示连接 p, q 的线段. 已给 E^n 里一个点集 S，若对于其中任意两点 p, q，总有 $\overline{pq}\subset S$，则 S 叫做凸集. 若一个紧凸集的内部不是空集，它就叫做凸体. 容易证明，一个凸体和一个球体同胚（但我们不需用这个事实）. 在本演讲里，我们将假定 E^3 里一个凸体的边界是可微若干次的.

1.2. 定理　E^3 里一个凸体的表面满足 $K\geqslant 0$.

取曲面的内向法矢为正法矢，以确定法曲率的符号. 假定在曲面上某点 p, $K<0$，则主曲率之一是负的，假定它是 k_2. 于是对应于 k_2 的特征矢和曲面法矢所作的平面同曲面的交线在 p 的法曲率是负的. 设 q 和 q′ 为这条曲线上靠近 p 的两点，则 $\overline{qq'}$ 显然不含在凸体内，与假设矛盾.

1.3. 定义　一个卵形面是一个闭曲面，它是一个凸体的边界，并且满足 $K>0$.

1.4. 定理（阿达马（Hadamard））　设 S_0 是 E^3 里满足 $K>0$ 的一个一般 g 亏曲面，则

1） $g=0$；

2） 球面映射是 1—1 而且是在上的；

3） S_0 是简单的；

4） S_0 是一个凸体的边界.

证明　1）由 $K>0$ 可知

$$\iint KdA=4\pi(1-g)>0.$$

故 $g < 1$. 但 g 是一个非负整数，故 $g = 0$.

2) 关于球面映射是 1—1 而且在上的，我们将给出三个本质不同的证明.

a) 设球面映射 $f: S_0 \to \Sigma$ 的度数为 d，则

$$d = 1 - g = P - N.$$

由于 $K > 0$，Σ 每一点都处于一般位置. 设 $q \in \Sigma$，则 q 被正覆盖次数至少是 1，而且没有负覆盖. 故 $P - N \geqslant 1$. 但另一方面，$1 - g \leqslant 1$. 故 $d = 1$，因而每一点恰好被正覆盖一次.（这给出 $g = 0$ 的另一个证明.）

b)"正式证明". 设 $f: S_0 \to \Sigma$ 为球面映射. 由于 $K > 0$，f 是局部同胚映射，故 $f(S_0)$ 是 Σ 的一个开子集. 另一方面，S_0 是紧的，f 是连续的，故 $f(S_0)$ 是 Σ 的一个闭子集. 但 Σ 是连通的，故 $f(S_0) = \Sigma$.

为了证明 f 是 1—1 的，假定 $q_0 \neq q_1$ 而 $f(q_0) = f(q_1) = q \in \Sigma$，则 q_0 有一个邻域 U，满足 $f(S_0 - U) = \Sigma$. 由于 Σ 只有正覆盖，$f(S_0 - U)$ 的面积 $\geqslant 4\pi$. 于是

$$\iint_{S_0 - U} K dA \geqslant 4\pi,$$

因而

$$\iint_{S_0} K dA > 4\pi.$$

但根据 1)，

$$\iint_{S_0} K dA = 4\pi.$$

故有矛盾.

c) 证明的依据是下面类似单值定理的定理:

设 f 是从 S_0 到 Σ 内的单值而局部 1—1 的映射，则 f 是 1—1 而且在上的.

证明如下. 设 $a \in S_0$ 而 $f(a) = \alpha \in \Sigma$. 由于 f 是局部 1—1 的，有一个邻域 $U(\alpha)$ 和一个邻域 $U(a)$ 1—1 对应. 令 $\varphi: U(\alpha) \to$

$U(\mathrm{a})$,则 $f\circ\varphi$ 是 $U(\alpha)$ 上的幺映射。 φ 叫做 α 的一个“函数元”. 我们要把 φ 拓广到整个Σ.

设 Γ 为Σ上由 α 到 β 的一条曲线,则在 S_0 上必有一条曲线 $\boldsymbol{C}$, 被 f 映射于 Γ 上. 理由如下. 假定这样的曲线不存在. 由于 φ 是 1—1 的,在 $U(\mathrm{a})$ 里有一条覆盖 $\Gamma\cap U(\alpha)$ 的曲线. 于是从 α 出发, Γ 上将有一个第一的点 $\alpha^*\neq\alpha$, 越过 α^*, $\boldsymbol{C}$ 就不存在. 设 $\{\alpha_i\}$ 为 Γ 上在 α 和 α^* 之间的点序列, 它收敛于 α^*. 这些 α_i 对应于 $\boldsymbol{C}$ 上一个序列 $\{\mathrm{a}_i\}$, 由于 S_0 是紧的, $\{\mathrm{a}_i\}$ 将收敛于一点 a^*, 而 $f(\mathrm{a}^*)=\alpha^*$. 但根据上面的论点, $\boldsymbol{C}$ 可以在 a^* 的某整个邻域内延拓,这就有矛盾. 所以 φ 可以沿 Γ 延拓到 β,而且在 Γ 邻近, φ 满足 $f\circ\varphi=$ 幺映射.

若 Γ' 是由 α 到 β 而且充分靠近 Γ 的另一条曲线,则 φ 可以沿 Γ' 拓广,并在 β 确定同一个函数元. 因此,若 Γ'' 是任意由 α 到 β 而和 Γ 同伦的曲线,则沿 Γ'', φ 的拓广要在 β 给出同一个函数元. 但球面是单连通的,一切由 α 到 β 的曲线彼此同伦. 所以,在 β 的函数元与 Γ 无关. 于是满足 $f\circ\varphi=$ 幺映射的 φ 已经在Σ的每一点确定. 因此, f 是 1—1 而且是在上的. 注意这个对于 2) 的证明没有用到公式 $\iint KdA=4\pi$,这是和另两个证明不同的. (关于这类论点的一般处理,可以参看 Chevalley, Theory of Lie Groups, 和 Steenrod, The Topology of Fibre Bundles.)

3) 为了证明 S_0 在 E^3 里的象 S 是简单的,我们将证明: 若 a 为 S 上任意对应于 $\mathrm{a}_0\in S_0$ 的点, T_{a_0} 是 S 在 a 的切面,则 S_0 上不会有不等于 a_0 的点 b_0,它所对应的点 $\mathrm{b}\in S$ 会在 T_{a_0} 上. 这样,也就不会有 $\mathrm{b}_0\neq\mathrm{a}_0$,使 $\mathrm{b}=\mathrm{a}$,因而 S 是简单的.

设 T_{a_0} 为 S 在 a 的切面, $\mathrm{a}\in S$ 对应于 $\mathrm{a}_0\in S_0$, 则有一点 $\mathrm{a}'\in S$,它和 T_{a_0} 的距离达到最大值.设 a_0' 为 S_0 上的对应点, 则切面 T'_{a_0} 和 T_{a_0} 平行, 而由于球面映射是 1—1 的, S 在 a 和 a' 的法矢方向相反. 根据同样理由, 不会存在 b_0, $\mathrm{b}_0\neq\mathrm{a}_0$, a_0', 而且 T_{b_0} 平行于 T_{a_0}.

现在假定有一点 $b_0 \neq a_0$，它的对应点 b 在 T_{a_0} 上，则因 T_{b_0} 和 T_{a_0} 不平行，它将和 T_{a_0} 相交。但这将表明，S 有些点在 T_{a_0} 的另一侧，即和 T'_{a_0} 在 T_{a_0} 的不同侧。于是根据 S 的紧性，在 T_{a_0} 的这一侧将有一点 c 和 T_{a_0} 有最大距离，而 S 在 c 的切面必与 T_{a_1} 平行。这就有矛盾。

4）由于 S 是简单的，它有确定的内部和外部。设 $a \in S$，而 T_a 是 S 在 a 的切面。在 3) 里，我们已经看到，S 上除 a 外没有别的点在 T_a 上。因此，S 整个在 T_a 的同一侧。由 3) 还可以看出，除 a 外，整个 T_a 在 S 的外部。为简明起见，假定 T_a 是处于水平位置而 S 是在 T_a 下方。则根据 3)，T_a 上方的整个半空间都在 S 的外部。现在，设 p 和 q 为 S 内部两点，则 $\overline{pq}$ 在 T_a 下面，因而 $a \notin \overline{pq}$。但 a 是 S 上任意点，故连接 S 内部两点的线段都不和 S 相交。因此，S 的内部是凸集，即 S 是一个凸集的边界。

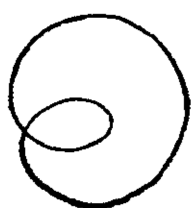
1.5. 注记 上述定理的假设形式上可以减弱，即只须要求 $K \neq 0$，因为我们已经知道有 $K > 0$ 的点。事实上，若把定理第 2) 部分适当改变，就只须假设 $K \geqslant 0$ 就至少可以推得 S 是一个凸体的表面的结论。

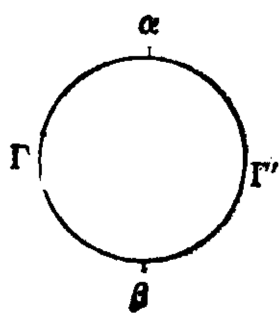
2. 到高维的推广

2.1. 定理 设 M^n 是 E^{n+1} 里的一般流形，$n \geqslant 2$，在它上面 $K > 0$；这里的 K 是像二维情形那样通过球面象来确定的。这样，球面映射是 1—1 而且在上的，M^n 是一个简单闭流形，并且是 E^{n+1} 里一个凸体的边界。

证明 证明和上面 1.4 中的 2) 和 3) 相同，问题的本质是，当 $n \geqslant 2$ 时，n 维球面是单连通的。

2.2. 注记 对于平面上一条曲线，定理显然不成立（见附图的例）。上面 1.4 中 2) 的证明 c) 不能用；因为在图 S^1 上，两点 α 和 β 可以用两条不同伦的曲线 Γ 和 Γ' 相连接。




α
Γ
Γ′
β

第　五　章

具常数高斯曲率的闭曲面(希尔伯特法)——推广及问题——关于魏因加尔吞曲面的一般事实

1. 球面的一个特征

1.1. 引言　本节目的是证明,球面是：1) 唯一的具常数高斯曲率的闭曲面;2)唯一具常数中曲率的卵形面. 实际上，我们证明下面更强的事实：若一个卵形面的主曲率满足一项关系 $k_2 = f(k_1)$，其中 f 是非增函数[1]，则卵形面是一个球面. 由于 $K = k_1k_2$，$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$，上面 1) 和 2) 两事实都可以由这个定理推得. 1) 和 2) 在叙述上的差别来自这样的事实：在任意闭曲面上总有 $K > 0$ 的点(见第二章，4.2). 因此，若 K 为常数，则 K 为正常数，因而根据第四章，1.4，曲面必是卵形面. 探究具常数 H 的一般闭曲面的特性，是一个困难得多的问题. 这问题将在第六和第七章里讨论.

上述定理的证明依赖于几个先行引理和定理，其中第一个是球面的一个重要特征.

1.2. 引理　球面是只含脐点的唯一闭曲面.

证明　设 $\bar{X}$ 为曲面法矢，则根据第一章，8.2，

$$\bar{X}_i = -l_i^j X_j.$$

在脐点，$l_i^j = k\delta_i^j$，故

$$\bar{X}_i = -kX_i.$$

用坐标 u, v 表示，即

1) 原文作"减函数". ——译者注

1) $$\bar{\boldsymbol{X}}_u + k\boldsymbol{X}_u = 0,$$
2) $$\bar{\boldsymbol{X}}_v + k\boldsymbol{X}_v = 0.$$
把 1) 对 v 微导,2) 对 u 微导,相减,得
$$k_v\boldsymbol{X}_u - k_u\boldsymbol{X}_v = 0.$$
但 $\boldsymbol{X}_u$, $\boldsymbol{X}_v$ 线性无关,故
$$k_u = k_v = 0.$$
于是由 1),2) 可知
$$\bar{\boldsymbol{X}} + k\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C},$$
其中 $\boldsymbol{C}$ 是常矢. 若 $k = 0$,则 $\bar{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{C}$,而 $\boldsymbol{X}$ 是平面. 但平面不是闭曲面,故 $k \neq 0$,
$$\frac{1}{k}\bar{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{k}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{X}.$$
最后,由于 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 是幺矢,
$$|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{C}'| = \frac{1}{|k|},$$
这是半径为 $\frac{1}{|k|}$ 的球面的方程.

注记 由这个证明可知,上述结果适用于局部. 因此,一块只含脐点的曲面只能是球面或平面的一部分.

1.3. 引理 设 R 为曲面上 $K > 0$ 的一个域. 假定 $\mathrm{P} \in R$ 不是脐点,而且在 P 点,$k_1 > k_2$,则下述情况不可能出现: k_1 在 P 有最大值,k_2 在 P 有最小值.

证明 设选取参数 u, v,使 $F = 0$,则根据第一章,6.6,
$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right].$$
这可以改写成
1) $$-2(EG)K = E_{vv} + G_{uu} + mE_v + nG_u,$$
其中 m 和 n 是某两个有界函数. 由于 P 不是脐点,可以选取参数 u, v,使曲线 u =常数是对应于 k_1 的曲率线,v =常数是对应于 k_2 的曲率线. 这样,又有 $M = 0$. 在这个坐标系里,科达齐方程是

2) $$L_v = \frac{E_v}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right) = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2),$$

3) $$N_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right) = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2).$$

现在，一般地，若 (du, dv) 是一个切线方向，则沿这个方向的法曲率是

$$k = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

由于方向 $du = 0$ 和 $dv = 0$ 依次对应于 k_1 和 k_2，

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}.$$

前一式表明 $L = Ek_1$. 对 v 微导，得

$$L_v = E_v k_1 + E(k_1)_v.$$

和 2) 比较，就得

$$E_v k_1 + E(k_1)_v = \frac{E_v k_1}{2} + \frac{E_v k_2}{2}.$$

故

$$E(k_1)_v = \frac{E_v}{2}(-k_1 + k_2),$$

或

$$E_v = -\frac{2}{k_1 - k_2} E(k_1)_v.$$

同样，

$$G_u = \frac{2}{k_1 - k_2} G(k_2)_u.$$

把这些关系[1] 代入 1)，得

$$-2EGK = -\frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_{uu} + m'(k_1)_v + n'(k_2)_u,$$

1) 还有 $G(k_2)_u = \frac{G_v}{2}(k_1 - k_2)$. ——译者注

或

$$-(k_1-k_2)EGK=-E(k_1)_{vv}+G(k_2)_{uu}$$
$$+m''(k_1)_v+n''(k_2)_u.$$

由于 $K>0$，$k_1-k_2>0$，上式左边是负的(不等于零). 至于右边,若 k_1 有最大值,则

$$(k_1)_v=0,\ -E(k_1)_{vv}\geqslant 0;$$

而若 k_2 有最小值,则

$$(k_2)_u=0,\ G(k_2)_{uu}\geqslant 0.$$

因此,若两种情况同时出现,则右边是非负的,这就有矛盾.

1.4. 定理 若 S 是卵形面而且它有一点 p 满足

1) $k_1\geqslant k_2$;

2) k_1 在 p 有最大值;

3) k_2 在 p 有最小值.

则 S 是球面.

证明 由于 S 是卵形面，$K>0$，因而根据引理 1.3，p 是脐点. 故

$$k_1(p)=k_2(p).$$

但据假设,对于一切 $x\in S$,

$$k_1(p)\geqslant k_1(x)\geqslant k_2(x)\geqslant k_2(p)=k_1(p).$$

故 $k_1(x)=k_2(x)$,即一切点是脐点.于是根据引理 1.2, S 是球面.

1.4′. 定理 上面定理可以叙述成：若 S 是卵形面，但不是球面,并且

1) $k_1\geqslant k_2$;

2) k_1 在 p 点有最大值;

3) k_2 在 q 点有最小值;

则 $p\neq q$.

1.5. 定理 设 S 为卵形面而且 $k_2=f(k_1)$，其中 f 是非增函数[1],则 S 是球面.

证明 若 f 是非增函数[1] 而 k_1 在 p 有最大值,则 k_2 在 p 有最

1) 原文作“减函数”. ——译者注

小值．故根据定理 1.4，S 是球面．

1.6. 历史注记 与此有关的原来问题是证明球面的刚性，即不可能弯曲一个球面而不改变其上的长度．由于 K 在弯曲下不变，从我们关于球面是唯一具有常数曲率的闭曲面的定理，容易推得上述结论．Liebmann 1899 年第一次证明这个事实．稍后，希尔伯特给出另一个证明，在其中，他证明了，在一块并非球面一部分的，具正常数曲率的曲面上，若 $k_1 > k_2$，则 k_1 的最大值和 k_2 的最小值必出现在边界上．我们的引理 1.3 只是希尔伯特主要引理的微小推广．(参看 Hilbert, Grundlagen der Geometrie 的附录．)

Liebmann (1900) 还证明了球面是唯一具有常数 H 的卵形面．我们的引理包含在阿列桑德洛夫 (A. D. Alexandroff) (1938) 和陈省身 (1945) 的论文中．

H. Weyl (1916) 也证明了类似我们引理 1.3 的一个引理．他证明了：在 $K > 0$ 的曲面上，不可能在同一点，H 有一个极大值而 K 有一个极小值．这个结果容易从引理 1.1 推得．

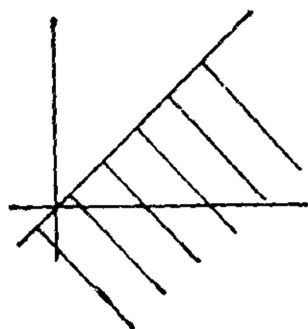
1.7. 练习 给出如下的一个例：一个非球面的曲面，在它上面，K = 常数 >0，$k_1 > k_2$，而且在一个域的一个内点，k_1 有一个极小值，k_2 有一个极大值．

提示 考虑一个具常数 K 的回转面 (例如参看 Struik 的书)．在它的赤道上就有这样的点．

2. 魏因加尔吞曲面

2.1. 曲率图 设 S 为曲面的一个域．若规定在 S 的每一点 p，

$$k_1(\mathrm{p}) \geqslant k_2(\mathrm{p})$$



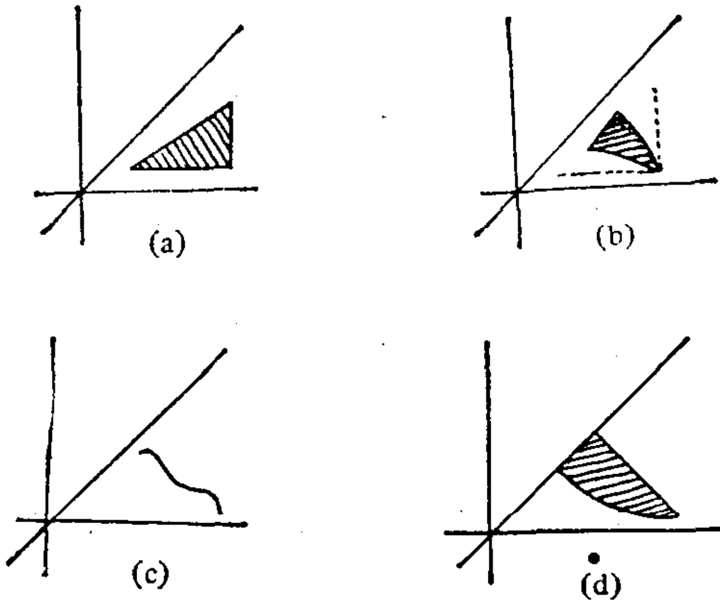
$(k_1(\mathrm{p}) = H + \sqrt{H^2 - K}$，$k_2(\mathrm{p}) = H - \sqrt{H^2 - K}$)，则主曲率 k_1 和 k_2 完全确定．于是函数 k_1 和 k_2 把 S 映射到 (k_1, k_2) 平面上直线 $k_1 = k_2$ 下侧的闭半平面内．在这个映射下，S 的象叫做 S 的**曲率图**．由第一节，可以推知关于 $K > 0$ 的曲面的曲率

图的若干情况.

1）由于映射到直线 $k_1 = k_2$ 的点是脐点，这条直线上的一个线段不可能成为一个曲率图．但是，根据 1.2，只有脐点的曲面必是一块球面，这时曲率图是 $k_1 = k_2$ 线上单独一点.

2）对于 $K > 0$ 的曲面，(a)，(b)，(c)里所示的情况是不可能的，因为在这些图里都有一点，在那里 k_1 有最大值，k_2 有最小值，和引理1.3 矛盾，(c)款表示 k_2 是 k_1 的递减函数，根据1.5，这是不可能的.

3）$H =$ 常数是垂直于 $k_1 = k_2$ 的直线，而 $K =$ 常数则是以 $k_1 = 0$ 和 $k_2 = 0$ 为轴的双曲线．因此，在1.6 中所叙述的 Weyl 定理(在 (d)中有所提示)是包括在我们的结果之内的，这从(a) 和 (d) 两图可以看出.



应当指出，人们还不知道一个点集构成曲率图的一般的充分条件.

2.2. 定义 魏因加尔吞 (Weingarten) 曲面(或 W 曲面)是满足一个方程 $W(k_1, k_2) = 0$ 的曲面，它的曲率图是一条曲线．我们将假定 W 是可微的． 由于 k_1, k_2 是 K, H 的函数，$W(k_1, k_2) = 0$ 显示有一宗关系 $U(K, H) = 0$．但是由 W 对于 k_1, k_2 的可微性不能推知 U 在 $k_1 = k_2$ 的点的可微性，所以我们假设 U 也是可微的.

例 一个回转曲面是一个 W 曲面．这是因为它的一条经线的

象构成整个曲率图，故曲率图是曲线.

练习 证明一个回转椭圆面的曲率图是曲线 $k_2 = ck_1^3$ 上的一个弧，其中 k_2 是一条经线的曲率，而 $k_1 = \frac{1}{\rho}$，其中 ρ 是由经线一点到回转轴沿曲线的法线的距离.

2.3. 问题 回转曲面是卵形面中唯一的W曲面吗?

2.4. W曲面的微分方程 对于W曲面的一个域，选取坐标系，使得它的方程是

$$z = z(x, y),$$

则利用第一章，10.3 中关于K和H的公式，就得

$$U(K, H) = \varphi(r, s, t, p, q) = 0.$$

故魏因加尔吞关系化为关于 z 的二阶微分方程.

这个微分方程的判别式可计算如下. 设 $P = 1 + p^2 + q^2$，则

$$\varphi_r = U_K \frac{t}{P^2} + U_H \frac{1+q^2}{2P^{3/2}},$$

$$\frac{1}{2}\varphi_s = U_K \frac{-s}{P^2} + U_H \frac{-pq}{2P^{3/2}},$$

$$\varphi_t = U_K \frac{r}{P^2} + U_H \frac{1+p^2}{2P^{3/2}},$$

故

$$\varphi_r\varphi_t - \frac{1}{4}\varphi_s^2 = \frac{1}{P^2}\left[U_K^2 K + U_K U_H H + \frac{1}{4}U_H^2\right]$$

$$= \frac{1}{P^2}\left(U_K k_2 + \frac{1}{2}U_H\right)\left(U_K k_1 + \frac{1}{2}U_H\right)$$

$$= \frac{1}{P^2} W_{k_1} W_{k_2}.$$

沿曲率图(曲线)$W = 0$，$W_{k_1}dk_1 + W_{k_2}dk_2 = 0$，故 $W_{k_1}W_{k_2}$ 的符号和微商 $\frac{dk_2}{dk_1}$ 相反. 因此，若 $\frac{dk_2}{dk_1} < 0$，则 $\varphi_r\varphi_t - \frac{1}{4}\varphi_s^2 > 0$，方程是椭圆型的；若 $\frac{dk_2}{dk_1} > 0$，则 $\varphi_r\varphi_t - \frac{1}{4}\varphi_s^2 < 0$，方程是双曲型

的．严格的说法是：若沿曲线$W=0$，$\frac{dk_2}{dk_1}<0$，则曲面的函数$z(x, y)$是$\varphi=0$的一个椭圆解；而若$\frac{dk_2}{dk_1}>0$，则$z(x, y)$是双曲解．在定理 1.5 的假设下，若加上f可微的条件而$f'<0$，那就是椭圆的情况．这些分析表明，在任何情况下，在确定W曲面的性质时，曲线$W=0$上$\frac{dk_2}{dk_1}$的符号起重要作用．

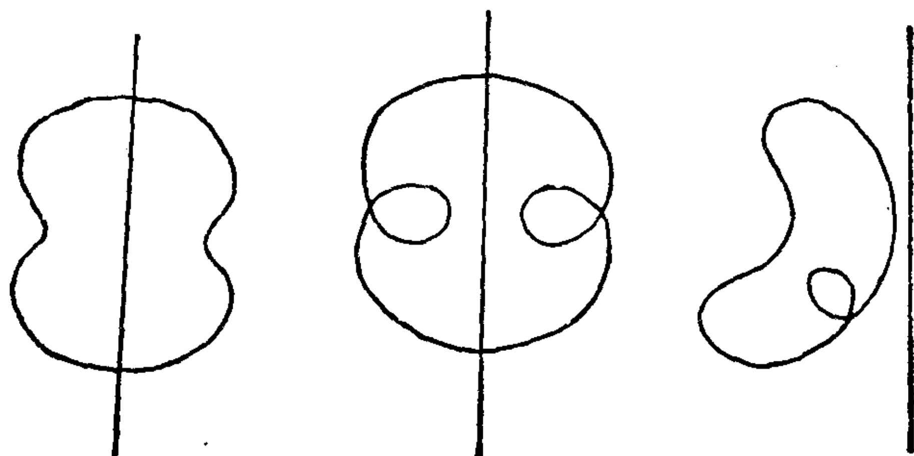
应当指出，用参数u，v表示时，W曲面的一个特征是

$$\frac{\partial(K, H)}{\partial(u, v)}=0.$$

2.5. 解析闭W曲面

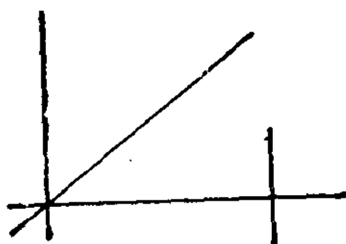
a）球面是解析闭W曲面．

b）下面的回转面是解析闭W曲面．



这些曲面的亏格是 0 或 1．

c）设$\boldsymbol{C}$为空间曲线．以$\boldsymbol{C}$的每点为中心，垂直于曲线，作半径为r的圆．这样生成的曲面叫做管形面．若$\boldsymbol{C}$是闭曲线而r充分小，则管形面是解析闭W曲面．它的亏格是 1，其曲率图如下．

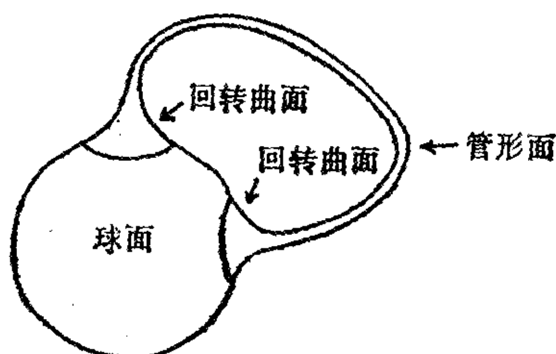


还不知道这些是不是仅有的解析闭W曲面.

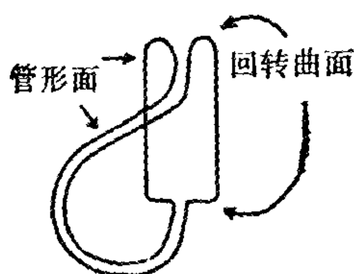
练习 证明管形面是两个主曲率中有一个为常数的唯一曲面.

2.6. C^{∞} 类闭W曲面举例

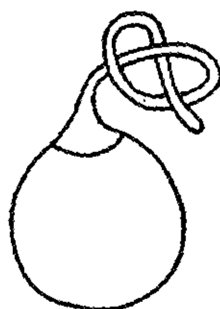
a) 把 g 个环柄接到一个球面上,就得到一个 g 亏曲面如图.



b) 一个不可定向曲面可以构成如图



c) 我们也可以有如图所示的曲面



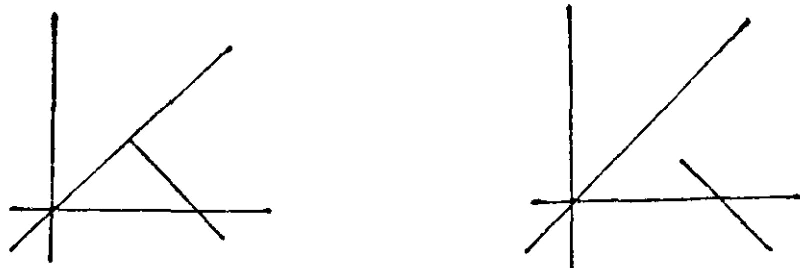
2.7. 在存在着哪些类型的W曲面这个一般性问题中,最饶有兴趣而又最重要的问题是: 是否有具常数中曲率H而异于球面的闭曲面? 通过曲率图来表达, 这就是, 是否存在以垂直于 $k_1 = k_2$ 的线段为曲率图的闭W曲面? 若只考虑卵形面, 这个问题的答案是"没有";这是定理 1.5 的特殊情况.

在第六和第七章,我们将证明以下定理:

1) 具有性质$H = C$的仅有(一般) 0 亏闭曲面是球面;

2) 具有性质$H = C$的仅有简单闭曲面(亏格任意)是球面.

异于球面, 具有性质 $H = C$, 但自交(即非简单)的一亏闭曲



面是否存在？这问题尚无解答[1]．

在进入第六和第七章之前，我们将指出，了解具常数H的一切闭曲面确实是重要的．事实上，我们将在下节说明，这个问题和几何中一个经典问题，即等周问题，密切联系着．

3. 等周问题和具常数中曲率的曲面

3.1. 引言 二维等周问题是，求包围固定面积的最短简单闭曲线．答案是圆．

三维情况的相应问题是求固定体积而其表面积最小的域．这里，经典答案是球体．这个问题和对于具常数H的曲面的研究，有如下的关系：我们将证明，曲面具常数H的一个充要条件是：它的面积A，对于保持其体积的变分，有逗留值(其意义将有说明)．这样，一切具常数H的简单闭曲面都是球面的猜想和下面的猜想是等价的：若把包围固定体积的简单闭曲面的面积A，作为一切这样的曲面集合上的函数，则A恰好有一个逗留值，即它的绝对最小值．

3.2. 设$V(S)$表示简单闭曲面S内部的体积．设$\mathfrak{s}$为一切$V(S)=1$的简单闭曲面的集合，$A(S)$为S的面积，则A是$\mathfrak{s}$上的函数，有恰好一个绝对极小值，即当S是球面的时候．设S为$\mathfrak{s}$中固定曲面，并考虑一个以t为参数的，连续而可微的单参数族的曲面S_t，作为S的变分：其中$S_t\in\mathfrak{s}$，$S_0=S$．这些变分叫做**保(持)体(积)的变分**．设$A(t)=A(S_t)$，则$A(t)$是t的可微函

1) 参看本书陈省身序的注．——译者注

数．若对于一切保体变分，$A'(0)=0$，则 S 叫做一个逗留曲面．

在 3.4 里，我们将证明： 曲面 S 为逗留曲面的一个充要条件是，它的中曲率为常数．

3.3. 几个公式 设 S 为矢函数 $\boldsymbol{X}$ 所确定的曲面，而 $\boldsymbol{X}(t)$ 是 S 的变分，$\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}$．设 $\varphi=\boldsymbol{X}'(0)\bar{\boldsymbol{X}}$ 表示矢变分 $\boldsymbol{X}'(0)$ 的法向分量．在第一章，8.7 里，我们指出

$$1)\qquad A'(0)=-2\iint\varphi H dA.$$

对于有边界的曲面，有公式

$$1')\qquad A'(0)=-2\iint\varphi H dA+\oint(\bar{\boldsymbol{X}},\boldsymbol{X}',d\boldsymbol{X}),$$

而 1) 可从 1′) 直接推得．

与此类似，可以证明

$$2)\qquad V'(0)=-\iint\varphi dA.$$

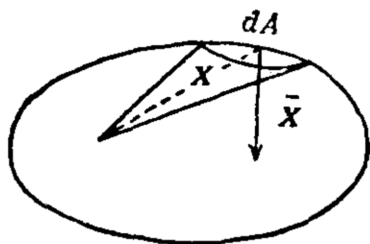
这可以从一般公式

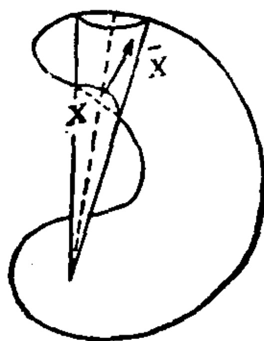
$$2')\qquad V'(0)=-\iint\varphi dA+\frac{1}{3}\oint(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{X},d\boldsymbol{X})$$

推得，其中体积的公式是

$$3)\qquad 3V=-\int\boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{X}}dA.$$

公式 3) 可以从左图导出．$-\boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{X}}$ 是具底面积 dA 的锥体的高．故 $-\boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{X}}dA$ 是锥体体积的三倍，因而 $3V=-\iint\boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{X}}dA$．对于一个非凸域，右图提示如何证明 3)．





练习 利用 3) 推导 2′) 和 2).

3.4. 定理 设 S 为简单闭曲面，则 S 具常数中曲率的一个充要条件是，S 为逗留面.

证明 设用矢函数 $\boldsymbol{X}$ 表示 S；为简化公式，令 $V(S)=1$. 定理中条件的必要性是明显的；因为若 H 是常数而 $X(t)$ 是 S 的保体变分，则

$$V'(0)=-\iint\varphi dA=0,$$

因而

$$A'(0)=-2\iint\varphi H dA=-2H\iint\varphi dA=0.$$

倒转来，假定对于每个保体变分，$A'(0)=0$，我们要证明 H 是常数. 设 φ 为 S 上使 $\iint\varphi dA=0$ 的任意函数. 我们首先要证明 φ 的确是某个保体变分的法向分量. 考虑函数族

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}+t\varphi\bar{\boldsymbol{X}}.$$

用 $V_1(t)$ 表示 $\boldsymbol{X}_1$ 的体积，则

$$V_1(0)=V(S)=1.$$

现在，$\boldsymbol{X}_1'(0)$ 的法向分量显然是 $\boldsymbol{X}_1'(0)\bar{\boldsymbol{X}}=\varphi\bar{\boldsymbol{X}}\bar{\boldsymbol{X}}=\varphi$. 故根据假设和 3.3 里的 2)，

$$V_1'(0)=-\iint\boldsymbol{X}_1'(0)dA=-\iint\varphi dA=0.$$

但是变分 $\boldsymbol{X}_1(t)$ 不一定保持体积. 为了弥补这个缺憾，只须取曲面族

$$\boldsymbol{X}(t)=V_1^{-1/3}(t)\boldsymbol{X}_1(t).$$

这时，按 3.3 中的 3)，显然

$$V(t)\equiv 1,$$

因而 $\boldsymbol{X}(t)$ 是 S 的保体变分. 现在，由于 $V_1'(0)=0$，

$$\boldsymbol{X}'(0)=\boldsymbol{X}_1'(0)=\varphi\bar{\boldsymbol{X}}.$$

所以，取 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 和两边的数积，得

$$\varphi=\boldsymbol{X}'(0)(\bar{\boldsymbol{X}}).$$

故 φ 不但是 $\boldsymbol{X}_1'(0)$ 的法向分量，而且是 $\boldsymbol{X}'(0)$ 的法向分量；即是

一个保体变分的法向分量.

据假设，S 是逗留曲面，故

$$A'(0) = -2\iint \varphi H dA = 0,$$

即 $\iint \varphi H dA = 0$. 又若 h 是任意常数，

$$\iint \varphi h dA = 0.$$

因此，对于任意使 $\iint \varphi dA = 0$ 的函数 φ 和任意常数 h,

$$\iint \varphi(H - h) dA = 0.$$

现设 h 为 H 的平均值，

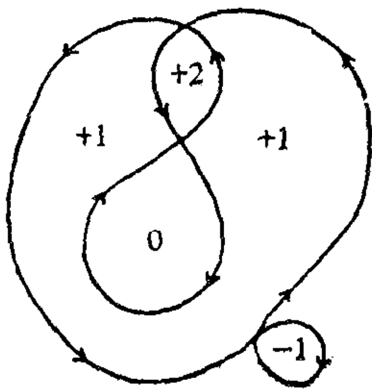
$$h = \frac{1}{A}\iint H dA,$$

则 $\iint (H - h) dA = 0$, 因而(令 $\varphi = H - h$)

$$\iint (H - h)^2 dA = 0.$$

于是 $H \equiv h$. 证毕.

3.5. 条件 H 为常数也出现于另一种场合：一个自由的肥皂泡处于平衡状态(不管多么不稳定)的充要条件是 H 为常数. 当然，实验上唯一已知的例是球面. 但是，举例来说，一个亏格大于零的肥皂泡未必不可能处于平衡状态.



3.6. 一般闭曲面 为了对非简单闭曲面考察定理 3.4 是否成立，需要推广体积的概念. 对于平面上一条闭曲线 $\boldsymbol{C}$, 一点 $x \notin \boldsymbol{C}$ 的"阶"是指 $\boldsymbol{C}$ 绕 x 的代数次数. 即对于 $\boldsymbol{C}$, x 的阶 $=\frac{1}{2\pi}\delta_c\theta$, 其中 θ 是以 x 为原点的极坐标里的辐角. 显然，x 的阶只决定于它所在的 $\boldsymbol{C}$ 的余集的连通分集，如图所示.

已给一个闭曲面 $S \subset E^3$ 和一点 $x \notin S$, 取以 x 为中心的一个小

球面，并把 S 投影到球面上. $\mathbf{x}$ 的阶，作为定义，就是这个映射的度数. 和平面的情况类似，这个阶也只决定于 $\mathbf{x}$ 所在的 S 的余集的连通分集. 于是对应每个这样的连通分集 R_i，有确定的阶 d_i. 作为 S 的体积，令

$$V = \sum d_i V(R_i),$$

其中 $V(R_i)$ 表示 R_i 的体积. 对于这样确定的 V，可以证明，仍有公式

$$3V = -\iint \boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{X}} dA.$$

于是定理 3.4 和它的证明也都适用. Rado 证明了，这时等周不等式仍然成立.

第　六　章

具常数中曲率的一般零亏闭曲面——推广

本章的主要定理在第五章，2.7 中已经提出来了. 我们将在第 2 节中给出它的证明，而在第 3 节中作一些推广. 第 1 节则用于推导一些公式和作些计算.

1. 正 方 参 数

1.1. 在第一章，10.2 里，我们提到了正方参数的引进；引进这样的参数 u, v 后，

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2).$$

在这样的参数系下，高斯曲率和中曲率是

1)
$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{E^2},$$

2)
$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{L + N}{2E}.$$

曲率线方程是

3)
$$-M du^2 + (L - N) du dv + M dv^2 = 0.$$

科达齐方程是

$$L_v - M_u = \frac{E_v}{2E}(L + N) = E_v H$$

$$M_v - N_u = -\frac{E_u}{2E}(L + N) = -E_u H.$$

但因 $EH = \dfrac{L + N}{2}$,

$$E_v H = -EH_v + \frac{L_v}{2} + \frac{N_v}{2},$$

$$E_uH = -EH_u + \frac{L_u}{2} + \frac{N_u}{2},$$

故科达齐方程可以写成

4) $$\begin{cases} \left(\dfrac{L-N}{2}\right)_u + M_v = EH_u, \\ \left(\dfrac{L-N}{2}\right)_v - M_u = -EH_v. \end{cases}$$

1.2. 复参数 若 u, v 为正方参数,可以引进复参数

$$w = u + iv, \ \bar{w} = u - iv.$$

容易推得微导法则

$$2\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v},$$

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v};$$

即对于任意复函数 $F(w, \bar{w}) = P + iQ$,

$$2F_w = (P_u + Q_v) - i(P_v - Q_u),$$

$$2F_{\bar{w}} = (P_u - Q_v) + i(P_v + Q_u).$$

令 $\Phi(w, \bar{w}) = \dfrac{L-N}{2} - iM$,则由 1.1 中的 1),2) 可知

1) $$\frac{|\Phi|}{E} = \frac{|k_1 - k_2|}{2}.$$

故曲面的脐点是 Φ 的零点. 经过简单计算,可知 1.1 中的曲率线方程 3) 可以写成

$$\mathrm{Im}\{\Phi(dw)^2\} = 0.$$

这等价于

2) $$\arg\Phi + 2\arg(dw) = m\pi \quad (m\text{ 为整数}),$$

或

2′) $$\arg(dw) = \frac{m\pi}{2} - \frac{1}{2}\arg\Phi,$$

其中 dw 是曲率线切线方向的微分.

用 i 乘 1.1, 4) 中的第二式再和第一式相加,就可以把科达齐

方程写成

$$\Phi_{\bar{w}} = EH_w.$$

1.3. 孤立脐点的指数 设 P 为孤立脐点，则 P 是两族曲率线的共同孤立奇点(两族曲率线,一族对应于 k_1,一族对应于 k_2,仍设 $k_1 \geqslant k_2$). 因此,对于这两族曲线，P 分别有一个指数 (参看第三章，1.2)；但由于两族曲率线互相垂直,由指数的定义即知这两指数相等. 于是孤立脐点的指数可以用

$$j = \frac{1}{2\pi} \delta(\arg dw)$$

完全确定，其中 dw 的意义和 1.2，2') 里的相同，而 δ 则表示沿一条小的闭线正向绕 P 一周的变差. 由于整数 m 是不变的，由 1.2，2) 可知

$$j = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\delta(\arg\Phi).$$

1.4. 参数变换 若把正方参数 u, v 代以另一对正则参数 x, y, 则 x, y 也是正方参数的充要条件是: $z = x + iy$ 为 $w = u + iv$ 的解析函数,其导数不等于零

$$z = z(w), \quad z' \neq 0.$$

这表明 w 平面和 z 平面之间的对应是保角对应.

我们要考察，在这样的参数变换下，1.2 里所引进的函数 $\Phi(w, \bar{w})$ 如何变化. 现在，由 Φ 的定义和 L, M, N 的定义，经过简易计算,可知

$$\Phi = -2\boldsymbol{X}_w\bar{\boldsymbol{X}}_w.$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 是曲面的径矢和法矢如常. 同样，若对于参数 x, y, $\Psi(z, \bar{z})$ 表示与 $\Phi(w, \bar{w})$ 相对应的函数,则

$$\Psi = -2\boldsymbol{X}_z\bar{\boldsymbol{X}}_z.$$

但因为

$$\boldsymbol{X}_w = \boldsymbol{X}_z\frac{dz}{dw}, \quad \bar{\boldsymbol{X}}_w = \bar{\boldsymbol{X}}_z\frac{dz}{dw},$$

故

$$\Phi = \Psi\left(\frac{dz}{dw}\right)^2,$$

或

$$\Phi(dw)^2 = \Psi(dz)^2.$$

这公式表明了Φ的变换规律．若采用黎曼面的通常术语，这规律可以叙述如下：在保角参数变换 $w \longleftrightarrow z$ 下，$\Phi(dw)^2$ 的变换如同一个复二次微分式(其中系数Φ是w和$\bar{w}$的一个函数)．

2. 主 要 定 理

2.1. 定理 若S为具常数H的零亏一般曲面(即它的参数曲面S_0[1]是零亏的)，则S为球面．

对这个定理，我们将给出两个不同的证明，它们都用到了第五章，1.2 中关于球面的特征；即我们将证明曲面一切点都是脐点．两个证明都用到下面 2.2 的引理，而第一个还用到定理 2.3.

2.2. 引理 条件 $H=$ 常数等价于：Φ是w的解析函数(记号同 1.2)．

证明 $H=c$ 等价于 $H_u=H_v=0$，因此，根据 1.1 的 4)，它等价于：Φ的实部和虚部满足柯西-黎曼方程．(这个引理也可以由1.2 的 3) 推得．)

2.3. 定理 设R为具常数H的曲面的一个域，U为R上脐点的集合．若 $p\in U$，则

1) 或者 P 是U的内点，

2) 或者 P 是U中具负指数的孤立点．

证明 根据 1.2 的 1)，U是函数H的零点集合，而根据引理 2.2，Φ是w的解析函数，因此，或者 $\Phi\equiv 0$ 因而一切点属于U，或者 $\Phi\neq 0$，而 P 是U的孤立点．在后一情况，我们可以应用 1.3，而由于Φ是解析函数，

$$\Phi(w) = cw^n + \cdots,$$

其中 $c\neq 0$，$n\geqslant 1$．故 $\delta(\arg\Phi) = 2\pi n$．于是

$$i = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\delta(\arg\Phi) = -\frac{n}{2} < 0.$$

---

1) 即第二章，3.1 的抽象曲面 S_0．——译者注

2.4. 主要定理的第一证明 可以把 S 的脐点和曲率线看成 S_0 的脐点和曲率线．设 U 为 S_0 的脐点集合．由于 S_0 的亏格是零，根据庞加莱定理(第三章，2.2 和第三章，2.4a$_1$)，U 是非空集．若 U 是有限集，则 U 中将至少有一点的指数是正的，与定理 2.3 矛盾．故 U 是无限集，而由于 S_0 是紧的，U 有一个聚点 p．但 U 是连续函数 $k_2 - k_1$ 的零点集合，因而是闭集，故 $p \in U$．再根据定理 2.3，p 是 U 的内点．设 U^* 为 U 的一切内点的集合．

现在，假设 U 有一点 $q \notin U^*$，则由 p 到 q 的一条连续曲线和非空集 $S_0 - U^*$ 的公共点中，从 p 算起，将有一个第一的点．这个点，作为 U 的聚点，将属于 U，但既不是 U 的内点又不是 U 的孤立点，与定理 2.3 矛盾．故 q 不存在，即 $U^* = S_0 = U$，因而 S 为球面．

2.5. 主要定理的第二证明 S 的度量在 S_0 上诱导出一个黎曼度量，其中也就含有角的度量．故 S 在 S_0 上诱导出一个(抽象)黎曼面的结构(象复解析函数论中所确定的)．在这个黎曼面上，有 1.4 中所讨论的二次微分式 $\Phi dw^2 = \Psi dz^2$．按引理 2.2，这个微分式是解析的．由于这个微分式的零点是脐点，只要我们能证明 $\Phi \equiv 0$，主要定理就证明了．因此，主要定理可以看作下面关于黎曼面的定理的系理．

2.6. 定理 在一个零亏紧致黎曼面 S_0 上，除 $\Phi \equiv 0$ 这个平凡情况外，没有其他解析二阶微分式 Φdw^2．

证明 证明这个定理的方法之一是沿着 2.3 和 2.4 中第一证明的思路．考虑 1.2 的 2) 在 S_0 上所确定的曲线及其奇点．像 2.3 那样，证明奇点指数是负的，再像 2.4 那样，利用庞加莱定理，最后证明 $\Phi \equiv 0$．

但是，也可以不用庞加莱定理而利用零亏紧致黎曼面只有一个保角类的事实(这是一般单值化定理的一部分)．据此，我们可以假设曲面 S_0 是普通的复数球面．这个球面可以用两个参数邻域覆盖：一个对应于 w，它覆盖 $w = \infty$ 以外的整个球面，另一个对应于 $z = \omega^{-1}$，它覆盖除 $w = 0$ 以外的整个球面．微分式 $\Phi dw^2 = \Psi dz^2$ 的系数之间有关系

$$\Phi(w)=\Psi(z)\left(\frac{dz}{dw}\right)^4=\Psi(z)w^{-4}=\Psi(z)z^4.$$

但 Φ 是 w 的整函数而 Ψ 在 $z=0$ 是正则的. 故 $w=\infty$ 时，$\Phi=0$. 因此，据利奥维尔 (Liouville) 定理，$\Phi\equiv 0$.

2.7. 注记 在考察 $H=C$ 的曲面时，出现了复解析函数，这是不足为奇的；我们只须指出，这类曲面包括极小曲面（定义是 $H=0$）在内，而极小曲面和复解析函数的联系则构成数学的经典篇章.

另一方面，"主要定理"不包括 $H=0$ 的款，因为在 $H=0$ 的曲面上，处处 $K\leqslant 0$，而对于闭曲面，这是不可能的（参看第二章，4.2）.

3. 特殊魏因加尔吞曲面

3.1. 引言. 在本节中，我们再考察满足关系

$$W(k_1, k_2)=0 \tag{1}$$

的曲面，其中 $k_1\geqslant k_2$ 如常（见第五章，2.2）. 我们将第 2 节中主要定理的"第一证明"所采用的方法用于比 $W=k_1+k_2-c$ 更一般的函数. 由于该方法主要是涉及脐点的，我们对 W 所规定的条件自然也将只是关于它在 $k_1=k_2$ 的点处的情况. 我们将总假定 $W(k_1, k_2)$ 有连续一阶导函数，而且

$$k_1=k_2 \text{ 时，} (W_{k_1}, W_{k_2})\neq(0,0).$$

这表明

$$k_1=k_2 \text{ 时，} \quad \frac{dk_2}{dk_1}=\kappa \text{ 存在} \tag{2}$$

（κ 可能无穷大）. 决定性的假设是

$$k_1=k_2 \text{ 时，} \kappa=-1. \tag{2'}$$

我们将证明：满足 2′) 的零亏解析闭曲面是球面.

若魏因加尔吞关系不是用 1)，而是用

$$U(K, H)=0$$

给定的，其中 U 在 $k_1=k_2$（或 $K=H^2$）的点可微，则 2) 等价于

2*) $K = H^2$ 时，$U_K H + \frac{1}{2} U_H \neq 0$.

这可以从以下关系和事实推得:

$$U_{k_1} dk_1 + U_{k_2} dk_2 = 0,$$

$$U_{k_1} = U_K k_2 + \frac{1}{2} U_H, \quad U_{k_2} = U_K k_1 + \frac{1}{2} U_H,$$

以及若 $k_1 = k_2$,则 $U_{k_1} = U_{k_2}$, $H = k_1 = k_2$. 但是我们将不采用这种形式来表达我们的条件.

实际上,将要用到的是条件 1), 2) 和 2′) 的下述较弱的形式: 假定 p_0 是一个脐点,而且有一个趋于它的非脐点序列 $\{p_n\}$. 设

$$h = H(p_0) = k_1(p_0) = k_2(p_0),$$

则条件 2) 表明,对于一切趋于 p_0 的非脐点序列 $\{p_n\}$,

2″) $$\lim_{p_n \to p_0} \frac{k_2(p_n) - h}{k_1(p_n) - h} = \kappa;$$

因而

3) $$\lambda = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} = \lim_{p_n \to p_0} \frac{H(p_n) - h}{\frac{1}{2}[k_1(p_n) - k_2(p_n)]}.$$

或者,在一个 $E(p_0) = 1$ 的正方坐标系下,

3′) $$\lambda = \lim_{p_n \to p_0} \frac{H(p_n) - h}{|\Phi(p_n)|},$$

其中 Φ 是 1.2 中的函数. 这是我们将要用到的全部条件. 由于用这个条件而不用魏因加尔吞关系，我们将证明的定理比所提出的定理更带一般性(参看下面的 3.5).

3.2. 定理 若一般零亏解析闭曲面 S 在它的一切脐点满足 $\lambda = 0$ (即 $\kappa = -1$) 时的条件 3),则 S 是球面.

3.3. 证明的第一部分 我们假定庞加莱定理. 和 2.3 类似,显然只须证明: 若 p_0 是脐点,则

1) 或者 p_0 是脐点集的内点,

2) 或者 p_0 是孤立脐点而 p_0 的指数 i 是负的. 我们可以假定 p_0 不是脐点集的内点,这样,就有一个趋于 p_0 的非脐点序列 $\{p_n\}$,

而条件 3) 就可以用于这个序列.

由于 S 是解析曲面,在 p_0 邻近,Φ 和 H 有泰勒(Taylor)级数展开式

$$\Phi(w, \bar{w}) = \Phi^{(n)}(w, \bar{w}) + \Phi^{(n+1)}(w, \bar{w}) + \cdots, n > 0,$$

$$H(w, \bar{w}) = H^{(0)}(w, \bar{w}) + H^{(1)}(w, \bar{w}) + \cdots,$$

其中 $\Phi^{(k)}$ 和 $H^{(k)}$ 为 k 次齐式,而且 $\Phi^{(n)} \not\equiv 0$. 由于 $H^{(0)}$ 是零次的,$H^{(0)} = h$,故

$$H(w, \bar{w}) - h = H^{(1)}(w, \bar{w}) + \cdots.$$

由 1.2 和条件 3),Φ 和 H 满足下面两关系

a) $$\frac{1}{E}\Phi_{\bar{w}} = H_w,$$

b) $$\lim_{p_i \to p_0} \frac{H - h}{|\Phi|} = \lambda.$$

把 Φ 和 H 的泰勒展开式代入 a),然后比较两边同次的项,可知 $k < n$ 时,$H_w^{(k)} = 0$. 但由于 H 是实的,

$$2H_w^{(k)} = H_u^{(k)} - iH_v^{(k)},$$

因而 $H_u^{(k)} = H_v^{(k)} = 0$. 于是 $H^{(k)}$ 是常数. 但 $H^{(k)}$ 是 k 次齐式,故 $0 < k < n$ 时 $H^{(k)} = 0$. 所以

$$H(w, \bar{w}) - h = H^{(n)}(w, \bar{w}) + H^{(n+1)}(w, \bar{w}) + \cdots.$$

方程 b) 可以改写成

$$\lim_{p_i \to p_0} \frac{H^{(n)} + \cdots}{|\Phi^{(n)} + \cdots|} = \lambda.$$

若在 p_0 引进极坐标 r 和 θ,则

$$H^{(m)} = r^m H^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta) = r^m H^{(m)}(\theta),$$

$$\Phi^{(m)} = r^m \Phi^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta) = r^m \Phi^{(m)}(\theta),$$

其中 $H^{(m)}(\theta)$ 和 $\Phi^{(m)}(\theta)$ 是 $\cos\theta, \sin\theta$ 的 m 次齐式. 所以

$$\lim_{p_i \to p_0} \frac{r^n H^{(n)}(\theta) + \cdots}{|r^n \Phi^{(n)}(\theta) + \cdots|}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{H^{(n)}(\theta) + rH^{(n+1)}(\theta) + \cdots}{|\Phi^{(n)}(\theta) + r\Phi^{(n+1)}(\theta) + \cdots|}$$

$$= \frac{H^{(n)}(\theta)}{|\Phi^{(n)}(\theta)|} = \frac{H^{(n)}(w, \bar{w})}{|\Phi^{(n)}(w, \bar{w})|} = \lambda.$$

现在,按假设,$\lambda = 0$,故 $H^{(n)}(w, \bar{w}) = 0$. 但根据关系 a),

$$\Phi^{(n)}(w, \bar{w})_{\bar{w}} = H^{(n)}(w, \bar{w})_w = 0.$$

故 $\Phi^{(n)}(w, \bar{w})$ 是 w 的解析函数. 由于它是齐 n 次的, $\Phi^{(n)} = cw^n$, 其中 $c \neq 0$. 于是

$$\Phi = cw^n + \Phi^{(n+1)} + \cdots$$
$$= cw^n + r^{n+1}B,$$

而且在 $w = 0$ 的一个充分小的邻域内, $|B| < M$, 其中 M 是某个常数.

3.4. 证明的第二部分 现在我们可以证明 p_0 的确是孤立点而且 $j < 0$. 考虑邻域 $r < \frac{|c|}{M}$. 假定在这个邻域里的某个 $w \neq 0$ 的点, $\Phi = 0$,则

$$cw^n = -r^{n+1}B,$$
$$|c|r^n = r^{n+1}|B|.$$

即在邻域 $r < \frac{|c|}{M}$ 里,有一点满足

$$r = \frac{|c|}{B} > \frac{|c|}{M},$$

这就有了矛盾.

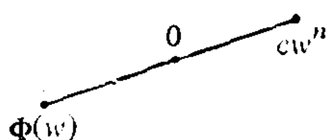
为了证明 $j < 0$, 根据 1.3 和 $\delta(\arg(cw^n)) = n > 0$, 只须证明,对于邻域 $r < \frac{|c|}{M}$ 里一个小的闭曲线,

$$\delta(\arg\Phi) = \delta(\arg(cw^n)).$$

但在这个邻域里,

$$|\Phi - cw^n| < |cw^n|.$$

这不等式的几何意义是, $\Phi(w)$, 0, cw^n 三点不会按这个次序在同一条直线上.



故

$$\arg\Phi - \arg(cw^n) \neq k\pi,$$

其中 k 是整数．于是我们有

$$\frac{\delta(\arg\Phi)-\delta(\arg(cw^n))}{2\pi}=\text{整数},$$

而

$$\frac{\arg\Phi-\arg(cw^n)}{2\pi}\neq\text{半奇数}.$$

因此,由连续性可知

$$\delta(\arg\Phi)-\delta(\arg(cw^n))=0.$$

3.5. 注记　上述证明突出地利用了解析性的假设，而关于具常数H的曲面的证明则不需要假设解析性．但实际上，在常数H的情形,并没有更大的一般性．原因如下．若曲面局部地用 $z=z(x, y)$ 表示,则方程 $H=C$ 可以写成

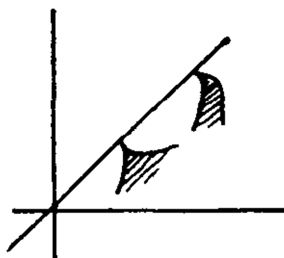
$$\begin{aligned}\varphi(r, s, t, p, q)&=(1+q^2)r-2pqs\\&+(1+p^2)t-2c(1+p^2+q^2)^{3/2}=0.\end{aligned}$$

但我们总有

$$(1+q^2)(1+p^2)-(pq)^2=1+p^2+q^2>0,$$

故 $\varphi=0$ 是一个解析二阶椭圆方程．但是贝恩施泰因（Bernstein）定理指出,这样方程的一个三次可微的解是解析的．所以,我们所考虑的 $H=$ 常数的曲面实际上是解析的．

Hartman 与 Winter(*Amer. J. of Math.*, Vol. **76**(1954), p.502)利用 3.1 中的条件 2*),对于二次可微的W曲面证明了定理 3.2．但他们的证明用到了魏因加尔吞关系，而我们则不用．事实上,我们的证明可以用于具有如下性质的任意曲面：曲面的曲率图在直线 $k_1=k_2$ 上有尖点,而且在尖点的切线垂直于该直线．



我不知道,在曲率图满足这样的条件时,对异于W曲面而又非解析的曲面能够证明些什么．

3.6. 进一步的注记　对于解析曲面，有以下定理（H. Hopf, *Math. Nachrichten*, Vol. **4**(1951))．

a) 若 $\kappa<0$ (即 $|\lambda|<1$),则 $\kappa=-1$ (即 $\lambda=0$),因而有关脐点是孤立的,它的指数是负的.

b) 若 $\kappa>0$ (即 $|\lambda|>1$), 则 $\kappa=(2m+1)^{\pm 1}$, 其中 m 是某个整数. 有关脐点是孤立的,它的指数是 $+1$.

这些事实的根据是, 具有下述性质的齐式偶 $\Phi^{(n)}(w, \bar{w})$, $H^{(n)}(w, \bar{w})$ 是很少的: $H^{(n)}$ 是实的,并满足

$$H^{(n)}=\lambda|\Phi^{(n)}|,\ H_{w}^{(n)}=\Phi_{\bar{w}}^{(n)}.$$

虽然上述文章只提到了 W 曲面,其证明却只用了条件 3) 而没有用 1) 和 2). 所以, 曲率图为曲线的假设可以用下面较弱的假设代替: 在 $k_1=k_2$ 的点,它有类似 3.5 的图的尖点(但切线不同).

不久前, K. Voss 对于解析曲面证明了下述定理:

b′) 若 $\kappa>0$,则曲面是回转曲面,其脐点在轴上*).

练习 I. 证明 b) 是 b′) 的系理.

II. 证明: 若曲面不是解析的而只属于 C^n (n 是已给的,它可以很大),则 b) 中关于 κ 的结论不成立.

提示: 构造一个回转面.

---

*) *Math. Annalen*, Vol. **138**(1959).

第　七　章

具常数中曲率的简单闭曲面(亏格任意)——推广

1. 引　　言

在本章里,我们将证明,具常数中曲率H的简单闭曲面必是球面. 由这个定理和上一章的主要定理,可见剩下尚未能判断的情况只是亏格 >0 的非简单闭曲面.

1955 年七月,阿列桑德洛夫在苏黎士所作的一个报告中提出了这个定理,并给出了证明纲要,但至今 (1956 年三月)为止,证明尚未发表. 证明的基础是一个明显的事实(见第 2 节),即球面是在每个方向都有一个对称平面的闭曲面.证明分两部分,"几何"部分和"解析"部分. 我们将首先证明,在适当的限制下,任何简单闭曲面都具有某种"对称性", 然后证明,一个绝对椭圆偏微分方程的两个解,如果在某点有特定类型的切触,就在该点的一个邻域内重合. 这两个结果结合起来,就将导出我们的定理.

我认为阿列桑德洛夫的这个证明,特别是下面第 3 节中的几何部分,在整体微分几何中,将开辟新的途径.

2. 球面的另一个特征

2.1. 定义 已给一个点集 $S\subset E^3$, 若 E^3 里对于一个平面 P 的欧氏反射把 S 映射到 S 上,则 P 叫做 S 的一个对称平面.

一个平面的方向就是它的法线的方向,因而通过平移,它对应于幺球面Σ上唯一的一对对极点.按这个对应关系,点集 S 的一切对应平面在Σ上所确定的点集 Σ', 叫做 S 的方向图.

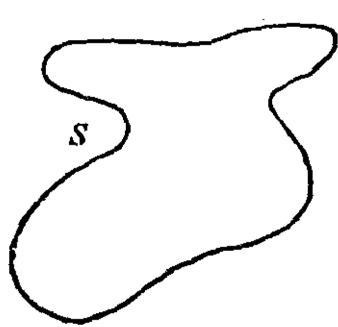
2.2. 引理 若一个简单闭曲面 S 在每个方向都有对称平面,

则 S 是球面. 实际上,只要Σ上的方向图Σ'有内点,则 S 是球面.

证明 假定Σ的北极是Σ'的一个内点,则经过北极的每个大圆上都有一段小弧,其上的每点都对应于 S 的一个对称平面. 现在,若 P_1, P_2 是两个对称平面,而 α 为 P_1 和 P_2 之间的角,则对 P_1 的反射和对 P_2 的反射相继施行的结果,构成绕 P_1 和 P_2 交线的转动,其转角是 2α,而由定义可知,这个转动令 S 不变. 设 P_1 为对应于北极的对称平面,则经过北极的一个固定大圆上,有一个小弧,其上每一点对应于一个令 S 不变的转动. 显然,所有这些小转动都有相同的转动轴. 但绕固定轴而令 S 不变的转动构成了群,它显然可以由上述小转动生成. 所以,绕这个轴的一切转动令 S 不变,即这个大圆上每一点对应于 S 的一个对称平面. 但这是经过北极的任意大圆,故 $\Sigma' = \Sigma$. 这表明, S 对于一切转动不变. 设 $\mathrm{a} \in S$, 则 S 含有经过 a 的一整个球面,因而 S 是球面.

3. 简单闭曲面的一项"对称"性质

3.1. 定义 设 S 为 E^3 里 C^2 类简单闭曲面(亏格任意), d 为 E^3 里一个特定方向.(作图时,我们总取 d 为自上而下的铅垂方向.)用 $n(\mathrm{x})$ 表示 S 在 $\mathrm{x} \in S$ 的内法矢. 设



$$A = \left\{\mathrm{x} \in S: \measuredangle[d, n(\mathrm{x})] < \frac{\pi}{2}\right\},$$

$$B = \left\{\mathrm{x} \in S: \measuredangle[d, n(\mathrm{x})] > \frac{\pi}{2}\right\},$$

$$C = \left\{\mathrm{x} \in S: \measuredangle[d, n(\mathrm{x})] = \frac{\pi}{2}\right\}.$$

按照这个规定, A 是内矢 $n(\mathrm{x})$ 向下处的点集, B 是 $n(\mathrm{x})$ 向上处的点集, C 是 $n(\mathrm{x})$ 在水平位置处的点集.

和 d 平行而且同向的有向直线叫做 d 线.

3.2. 引理 1) A 和 B 是 S 上的开集, C 是闭集.

2) 若$\overline{}$表示 S 上的闭包,则

$$\bar{A}\subset A\cup C\ (\bar{A}\cap B\ \text{是空集}),$$
$$\bar{B}\subset B\cup C\ (\bar{B}\cap A\ \text{是空集}).$$

3）若 l 是和 S 相遇于 $a\in A$ 的一条 d 线，则 l 和 S 在 a 不相切，而且，若沿 l 正向行进时，就从 S 的外部经过 a 进入内部，即 A 的点是沿 d 方向由 S 外到 S 内的入口点．同样，B 的点是沿 d 方向由 S 内到 S 外的出口点．

证明是显然的．

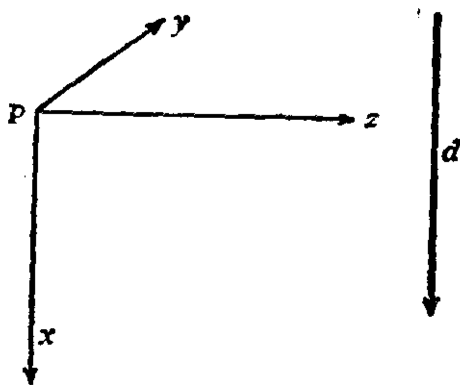
3.3. 定义 曲面在一点的渐近方向是在该点第二基本齐式等于零的方向，即

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

所确定的方向．在一个 $K>0$ 的点，这方程没有解，因而没有（实）渐近方向． 若 $K<0$，恰好有两个渐近方向． 我们要着重考虑 $K(p)=0$ 的点 p．在这样的点的渐近方向叫做**双重渐近方向**．有两种可能的情况： 一种是 $(L,M,N)\neq(0,0,0)$，即 p 是普通抛物点，这时刚好有一个双重渐近方向；另一种是 $(L,M,N)=(0,0,0)$，即 p 是平点，这时一切方向都是双重渐近方向．

若 E^3 里一个特定方向 d 平行于 S 的一个双重渐近方向，则 $\boldsymbol{d}$（对于 S）称为**例外方向**．

3.4. 引理 设 S 为 C^2 类简单闭曲面，d 对于 S 不是例外方向，则 3.1 中所确定的点集 C 是有限多条互不相交的正则简单闭曲线的并集，而且



$$\bar{A}=A\cup C,\quad \bar{B}=B\cup C.$$

证明 设 $p\in C$；以 p 为原点，取坐标系 (x,y,z)，其正 x 轴是一条 d 线，正 z 轴是 S 的内法矢，而坐标系的定向是正的．于是 xy 平面是 S 在 p 的切面，而在 p 的一个邻域内，曲面的方程可以写成 $z=z(x,y)$；即确定 S 的矢函数可以写成

$$\boldsymbol{X}=\{x,y,z(x,y)\},$$

其中 z 是二次可微的. 由于

$$X_x = (1, 0, z_x),\ X_y = (0, 1, z_y),$$

内法矢是

$$\bar{X} = \frac{X_x \times X_y}{|X_x \times X_y|} = \frac{1}{(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{1/2}}(-z_x, -z_y, 1).$$

故在 P 的邻域内,

$$A = \{X: z_x > 0\},\ B = \{X: z_x < 0\},$$
$$C = \{X: z_x = 0\}.$$

现在,

$$z(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + D(x, y),$$

其中 D 含更高次的项. 由于 P 不是平点,$(a, b, c) \neq (0,0,0)$. 事实上,$(a, b) \neq (0,0)$;因为若 $(a, b) = (0,0)$,则

$$z(x, y) = cy^2 + D(x, y),$$

这表明 x 轴将是一个双重渐近方向,和坐标系的选法矛盾. 因此,

$$z_x = 2ax + 2by + D_x(x, y),$$

其中 $\operatorname{grad} z_x(0,0) = 2(a, b) \neq (0,0)$. 故在 P 邻近,确定 C 的曲线 $z_x(x, y) = 0$ 是 $(0,0)$ 附近的正则曲线. 但 P 是 C 的任意点,又 S 是紧的,故 C 是有限多条互不相交的正则简单闭曲线的并集.

为了证明引理的第二部分,设 $\tilde{C}$ 为 C 在 xy 平面上的投影,则 $\tilde{C}$ 是经过 P 的正则曲线,而且在 $\tilde{C}$ 的某一侧,$z_x > 0$,在另一侧,$z_x < 0$. 故 $C \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. 但根据 3.2 的 2),$\bar{A} \subset A \cup C$,$\bar{B} \subset B \cap C$,所以 $\bar{A} = A \cup C$,$\bar{B} = B \cup C$.

3.5. 引理 沿用 3.4 的假定和记号,再假定 x 轴的一节 $T = \{x: 0 < x < x_1\}$ 不含 S 的任何点,因而 T 或者在 S 的内部,或者在 S 的外部. 设 $\hat{S}$ 是在 P 的任意小的邻域内,S 和半平面 $(y = 0, x > 0)$ 的交集,则或者 T 在 S 的内部,而 $\hat{S} \cap A \neq 0$;或者 T 在 S 的外部,而 $\hat{S} \cap B \neq 0$.

证明 和 3.4 一样,(在 P 的一个邻域内)正 z 轴在 S 内部,负 z 轴在 S 外部. 若 T 在内部,则 S 把 T 和负 z 轴隔开(见图 1),故在 $\hat{S}$ 上,$z < 0$. 因此,由于在 P 点,$z=0$,在 $\hat{S}$ 上某处,$z_x < 0$,即

$\hat{S} \cap A \neq 0$. 同样,若 T 在外部,则 S 把 T 和正 z 轴隔开,因而在 $\hat{S}$ 上, $z > 0$,故在 $\hat{S}$ 上某处, $z_x > 0$,即 $\hat{S} \cap B \neq 0$.

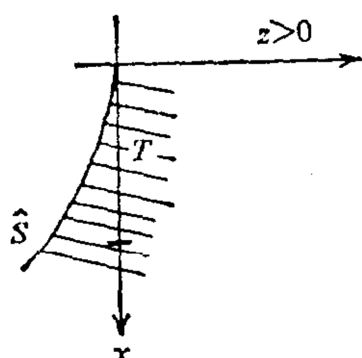


图 1

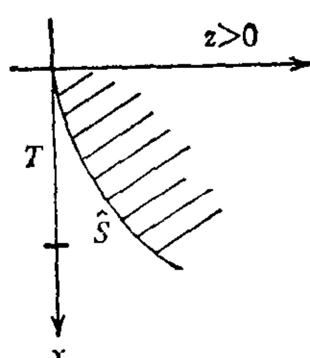


图 2

3.6. 定义 设 α 和 β 为两片有公共内点的曲面, P 为一个公共内点.

1) 若 α, β 在 P 有公切面,则 α 和 β 在 P 有切触.

2) 若 α 和 β 在 P 有切触而且有公共的正法矢,则 α 和 β 在 P 有正切触.

3) 在 P 的一个邻域内,设 α 用方程 $z_1 = z_1(x, y)$ 表示, β 用 $z_2 = z_2(x, y)$ 表示. 若在 P 的每个邻域内, $z_1 - z_2$ 变号,则 α 和 β 在 P 相交.

4) 若 α 和 β 在 P 有切触, 但在 P 不相交, 则 α 和 β 在 P 有正常切触.

5) 若 α 和 β 在 P 有切触, α 上有一条经过 P 的正则(即 C^1 类)曲线 Γ,而且在 Γ 的至少一侧, α 和 β 不相交,则 α 和 β 在 P 有半正常切触.

3.7. 例 方程

$$z^{(k)} = \operatorname{Im}\{c(x + iy)^k\}, \quad k \geqslant 2,$$

所确定的 E^3 中的曲面和 xy 平面在原点有非半正常的切触.

证明 函数 $z^{(k)}$ 在每一条经过原点而和 x 轴作 $j\frac{\pi}{k}$ 角[1]的直线上等于零, $j = 1, 2, \cdots, k$, 而在跨过这些直线中的任何一条时,

1) 这里假定了 C 是实数,但当 C 不是实数时,最后结论仍然正确. ——译者注

它变号. 若 Γ 为经过原点的任意正则曲线[1],则因 $k \geqslant 2$,在 Γ 的余集的每个分支集中都有 $z^{(k)}=0$ 的点. 由于跨过 $z^{(k)}=0$ 时, $z^{(k)}$ 变号,在每一个分支集中,它也要变号.

3.8. 定理 设 S 为 C^2 类简单闭曲面, d 对于 S 为非例外方向,则有一个垂直于 d 的平面 P,具有以下性质:若 S' 是 S 对 P 反射的象,则 S 和 S' 有半正常正切触.("正"法矢总是指内法矢.)

证明 若 a 和 b 为两点,用 $M(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ 表示 a, b 联线的垂直平分面. 我们要证明,下面两种情况之一必将出现:

1) 存在着在同一条 d 线上的两点 a, b,其中 $\mathrm{a} \in A$, $\mathrm{b} \in B$,而且,若 β 是 S 上 b 的一个充分小的邻域,而 β' 是 β 对 $M(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ 反射的象,则 β' 和 A 不相交切触.

2) 有一点 $\mathrm{c} \in C$,而且,若 γ 是 S 上 C 的一个充分小的邻域.而 γ' 是 γ 对经过 c 而垂直于 d 的平面的反射象,则 γ' 和 A 不相交切触.

仍然假定 d 是铅垂方向,而设 P 是在 S 下方的一个水平面. 设 $\bar{B}''$ 是 $\bar{B}$ 对于 P 的反射象. 把 $\bar{B}''$ 朝上平移直到它初次和 $\bar{A}$ 相遇. 平移后的这个点集用 $\bar{B}'$ 表示,则 $\bar{B}'$ 是 $\bar{B}$ 对于一个垂直于 d 的平面的反射象,而且显然 $\bar{B}'$ 和 $\bar{A}$ 有公共点但不相交. 设 $p \in \bar{A} \cap \bar{B}'$. 我们将证明:或者 $\mathrm{p}=\mathrm{a} \in A$ 而上述的 1) 得到满足,或者 $\mathrm{p}=\mathrm{c} \in C$ 而上述的 2) 得到满足.

首先,我们指出,在经过 p 的 d 线上,没有 $\bar{A}=A \cup C$ 的点在 p 之下;因为我们上面是把 $\bar{B}''$ 朝上平移直到它初次和 $\bar{A}$ 相遇. 因此,若 S 有任何点在 p 之下,它必是 B 的点. 但根据 3.2 的 3),这样的点必是由 S 内到 S 外的出口点,而由于在 p 之下没有 $A \cup C$ 的点,这是 S 在 p 之下唯一的点,所以

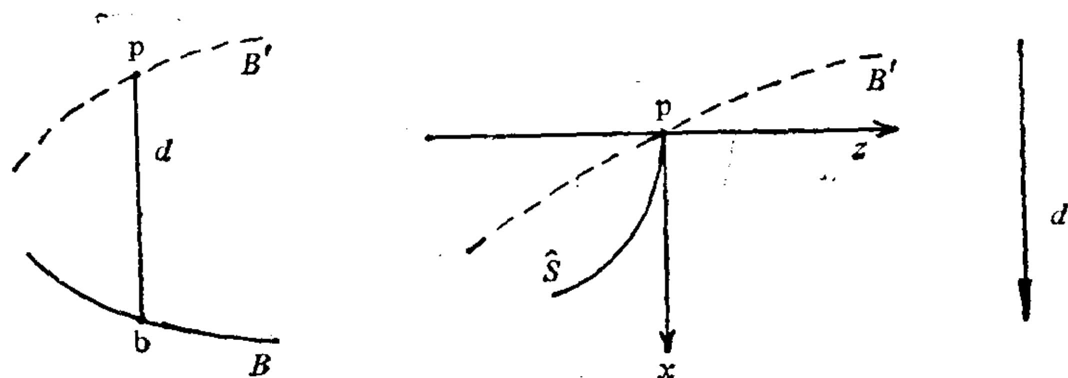
1) 或者在 p 之下有 B 唯一的点 b,但没有 $A \cup C$ 的点.

2) 或者在 p 之下没有 S 的点.

---

1) Γ 在 xy 平面上,下面的余集指相对于 xy 平面的余集. ——译者注

第一款 我们证明，这时 $p\in A$（即 $p\notin C$）。由于$b\in B$，经过 p 的 d 线和 S 在 b 不相切，因而在 p 也不和 B' 相切(见图)。由 B' 的定义可知，在 p 的一个邻域内，在 B' 之下没有 A 的点．另一方面，因为 b 是由 S 内到 S 外的出口点，线段 $\overline{pb}$（除端点外）含在 S 的内部．因此，若 $p\in C$，则根据引理 3.5，在 p 的每一个邻域内将有 $\hat{S}\cap A$ 的点，在这样的点，$\hat{S}$ 和 x 轴相切[1]并且在平面 $x=0$ 之下，这显然是有矛盾的．故 $p\in A$。



第二款 这时 $p\in C$．因为，若 $p\in A$，则经过 p 的 d 线将在 p 点进入 S 内，因而在某点 $b\in B$ 离开 S 内部，和上面假设 p 下没有 S 的点矛盾．故 $p=c\in\bar{A}\cap\bar{B}$．在由 $\bar{B}$ 到 $\bar{B}'$ 的映射下，$p=c$ 显然不变．故该映射是对于经过 p 的水平面的反射．

设 γ 为 p 的邻域，γ' 为 γ 的反射象，则 γ' 含有 A'，B'，C' 的点(这里的′表示点集的反射象)．已经知道 $\bar{B}'=B'\cup C'$ 不和 A 相交，所以剩下来的是要证明 $\gamma'\cap A'$ 和 A 不相交．

设 $\tilde{C}$ 为 C 在 xy 平面上的投影，则根据 3.4，$\tilde{C}$ 是正则曲线．设 $q\in C$ 而 q' 为 q 的反射象，则由于 p 是 $\bar{B}''$ 和 $\bar{A}$ 最初相遇的点，q' 或者在 q 之下或者就是 q．于是

$$x(q)\leqslant x(q')=-x(q),$$

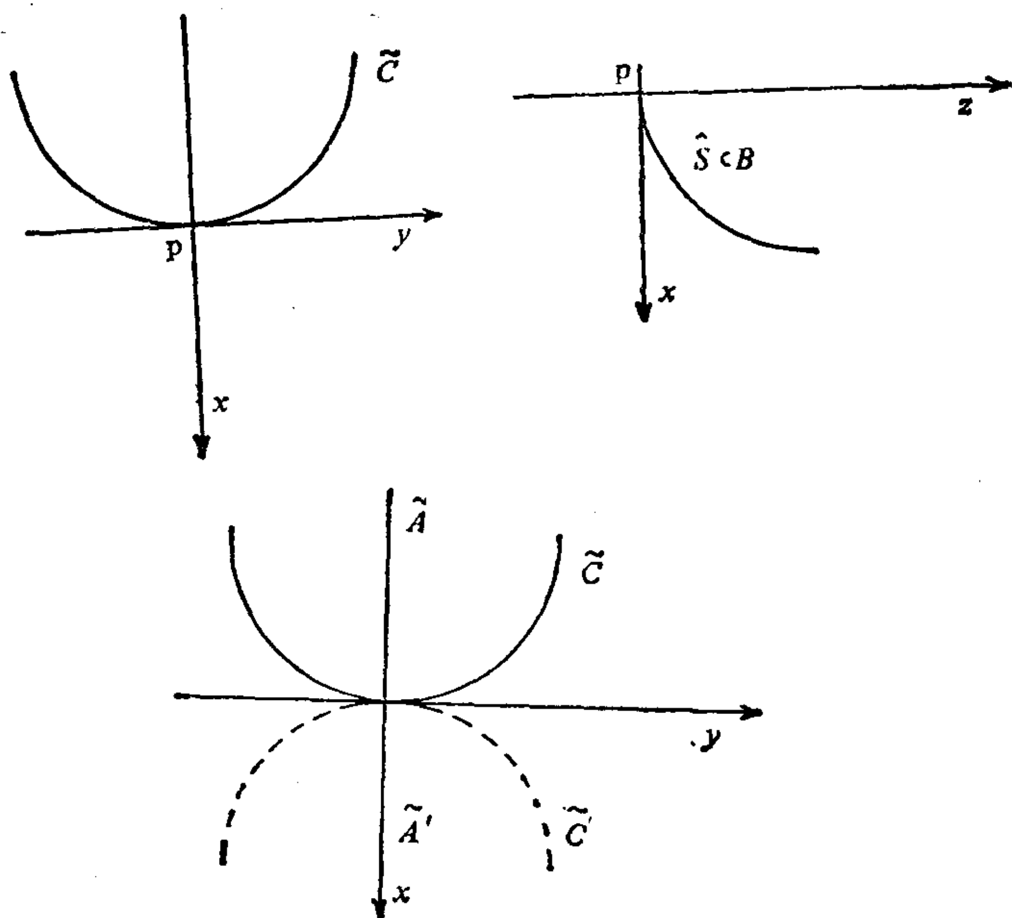
因而 $x(q)\leqslant 0$．所以 C 是在 y 轴上侧或在 y 轴上．而且在 p 有极低点．

$\tilde{C}$ 把 p 的邻域[2]分成两个支集，一个对应于 A 的投影 $\tilde{A}$，另一

---

1) 取坐标系如 3.4，下同．——译者注

2) 指 p 点在 xy 平面上的邻域．——译者注

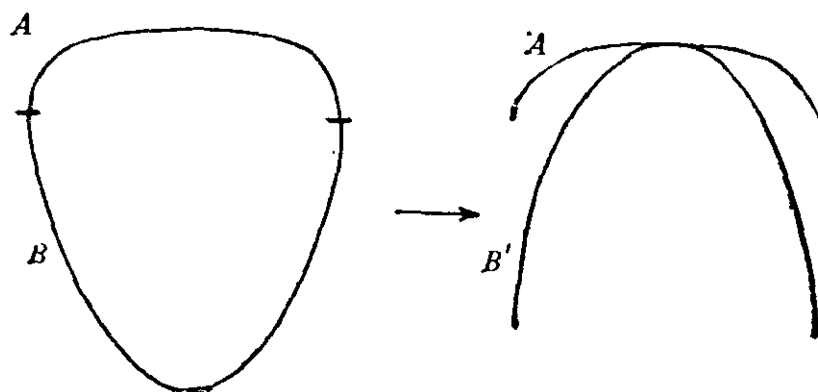


个对应于 B 的投影 $\tilde{B}$. 可以断定, $\tilde{B}$ 是在下方的一个, 即含正 x 轴的一个. 这是因为, 正 x 轴在 S 的外部, 因而根据引理 3.5, 在 yz 平面下侧有 B 的点. 故 $\tilde{A}$ 在 $\tilde{C}$ 上方. 这样, 容易由图看出, $\tilde{A}'$, $\tilde{C}'$ 和 $\tilde{A}$ 都没有公共点, 因而 $\gamma'\cap A'$ 和 A 不相交.

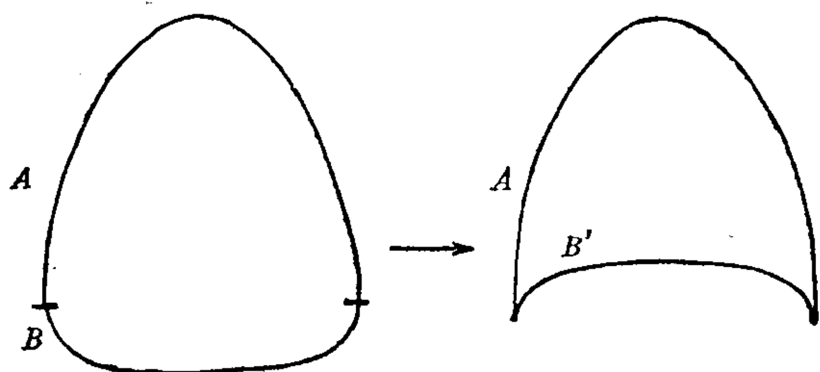
这样就完成了定理 3.8 的证明.

3.9. 例 定理 3.8 中的两种情形确实存在, 如下面两图所示.

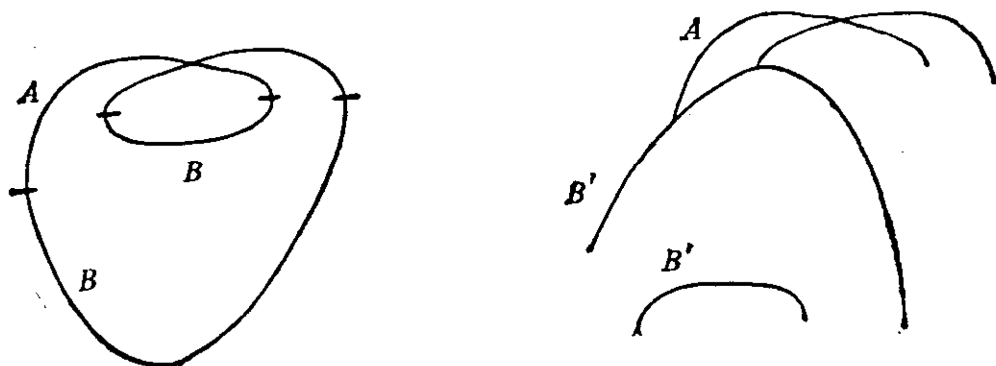
第一款



第二款



对于自己相交的曲面，证明不适用，如图所示．不过，证明虽不适用，定理仍很可能成立．



4. 绝对椭圆的偏微分方程

4.1. 定义 设 $\varphi=\varphi(r, s, t, p, q, z, x, y)$ 为在 E^8 里某个域内确定的八元函数． 若 φ 有连续一阶导函数，我们就可以把 $\varphi=0$ 看作 $z=z(x, y)$ 的一个二阶偏微分方程，其中 $z(x, y)$ 的偏导函数是 $p=z_x$, $q=z_y$, $r=z_{xx}$, $s=z_{xy}$, $t=z_{yy}$.

考虑二次齐式

$$\Delta=\varphi_r\lambda^2+\varphi_s\lambda\mu+\varphi_t\mu^2.$$

1) 若 $z(x, y)$ 是 $\varphi=0$ 的一个解，而当这个特殊的函数 $z(x, y)$ 代入 φ 后，Δ 是恒正齐式，则 z 叫做 $\varphi=0$ 的一个**椭圆解**，或者说，$\varphi=0$ **对于** z **是椭圆的**.

2) 若对于一切解 $z(x, y)$，Δ 是恒正的，则 $\varphi = 0$ 是椭圆型的.

3) 若对于一个域 $R \subset E^8$ 里的八个变元的任意值，Δ 总是恒正的，则 Δ 在 R 里是绝对椭圆的.

若 $\varphi = A_1 r + A_2 s + \cdots + A_6 z + A_7$，其中 $A_i = A_i(x, y)$，$i = 1, 2, \cdots, 7$，则 $\varphi = 0$ 叫做线性偏微分方程. 若 $A_7 = 0$，则 φ 是齐次的. 一个线性方程是椭圆型的充要条件是，$A_1\lambda^2 + A_2\lambda\mu + A_3\mu^2$ 是恒正的.

4.2. 例 方程 $H = c$ 可以写成

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t - 2c(1 + p^2 + q^2)^{3/2} = 0.$$

这里 $\varphi_r = 1 + q^2$，$\varphi_s = -2pq$，$\varphi_t = 1 + p^2$. 故

$$\begin{aligned}\Delta &= (1 + q^2)\lambda^2 - 2pq\lambda\mu + (1 + p^2)\mu^2 \\ &= \lambda^2 + \mu^2 + (q\lambda - p\mu)^2.\end{aligned}$$

显然，对于诸变数的任意值，Δ 都是恒正的. 故 $H = c$ 是一个绝对椭圆偏微分方程.

4.3. 引理 设 $\phi(u)$ 是 n 元函数，$u = (u_1, \cdots, u_n)$，它在 E^n 的一个凸域里是可微的，则

$$\phi(v) - \phi(u) = \sum_{i=1}^{n} A_i(v_i - u_i),$$

其中

$$A_i(u, v) = \int_0^1 \phi_i(\tau v + (1 - \tau)u)d\tau,$$

而 ϕ_i 是 ϕ 对于它的第 i 个变元的导函数.

证明 用 $'$ 表示对参数 τ 的导数，则

$$\begin{aligned}\phi(v) - \phi(u) &= \int_0^1 \phi'(\tau v + (1 - \tau)u)d\tau \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\tau v + (1 - \tau)u)(\tau v_i + (1 - \tau)u_i)'d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{\int_0^1 \phi_i(\tau v + (1 - \tau)u)d\tau\right\}(v_i - u_i).\end{aligned}$$

4.4. 引理 设偏微分方程 $\varphi=0$ 在一个凸域 R 里是绝对椭圆的，而 z_1, z_2 是它的两个解，则

$$z = z_1 - z_2$$

满足一个齐次线性椭圆偏微分方程.

证明 据假设,

$$\varphi(r_i, s_i, t_i, p_i, q_i, z_i, x, y) = 0, \quad i = 1, 2.$$

故根据引理 4.3,

$$\begin{aligned}
&\varphi(r_2, s_2, \cdots) - \varphi(r_1, s_1, \cdots) \\
&\quad = A(r_2 - r_1) + B(s_2 - s_1) + C(t_2 - t_1) \\
&\qquad + D(p_2 - p_1) + E(q_2 - q_1) \\
&\qquad + F(z_2 - z_1) = 0,
\end{aligned}$$

其中，例如 $A(x, y) = \int_0^1 \varphi_r d\tau$，而 φ_r 的变元是

$\tau r_2(x, y) + (1 - \tau) r_1(x, y), \cdots, \tau z_2(x, y) + (1 - \tau) z_1(x, y), x, y$，等等. 显然，这个方程是线性而齐次的，而且 $z_1 - z_2$ 满足它.

这方程是椭圆型的. 这是因为，对于 R 里的任意值,

$$\varphi_r \lambda^2 + \varphi_s \lambda\mu + \varphi_t \mu^2$$

是恒正的，因而特殊地，对于 A, B, 等积分内出现的值，它也是恒正的. 因此，取这个齐式的积分，得到的

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 [\varphi_r \lambda^2 + \varphi_s \lambda\mu + \varphi_t \mu^2] d\tau \\
&\quad = A(x, y)\lambda^2 + B(x, y)\lambda\mu + C(x, y)\mu^2
\end{aligned}$$

也是恒正的.

4.5. 定理 设 $\varphi = 0$ 是在一个凸域内绝对椭圆的偏微分方程. 设 z_1, z_2 是 $\varphi = 0$ 的两个解，而且在 $(0,0)$,

$$\begin{aligned}
z_1(0,0) &= z_2(0,0), \\
p_1(0,0) &= p_2(0,0), \\
q_1(0,0) &= q_2(0,0),
\end{aligned}$$

但在 $(0,0)$ 的一个邻域内，$z_1 \neq z_2$. 这样,

$$Z = z_2 - z_1$$

所确定的曲面和 xy 平面有非半正常的切触.

我们将在 Z 是解析函数的假设下证明这个定理.例如,若 φ 是解析的而 Z 是至少三次可微的，则根据贝恩施泰因定理， Z 就是解析的.

证明 根据引理 4.4, Z 满足一个齐次线性椭圆偏微分方程

$$\sum A_{ij} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + \sum B_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} + FZ = 0.$$

在坐标的一个齐次仿射变换下，系数 A_{ij} 的变化和一个二次齐式相同;即：若 $u_k = \sum t_{ki} x_i$,其中 t_{ki} 是常数而且 $\det(t_{ki}) \neq 0$,则

$$\sum A_{ij} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$$

变成

$$\sum \bar{A}_{ij} \frac{\partial^2 z}{\partial u_i \partial u_j},$$

其中

$$(\bar{A}_{ij}) = (t_{ij})(A_{ij})(t_{ij})'.$$

由于具系数 A_{ij} 的齐式是恒正的,可以通过线性变换,使得

$$A_{11}(0,0) = 1,\ A_{12}(0,0) = 0,\ A_{22}(0,0) = 1.$$

现在,由于已经假定 Z 是解析的,它可以用齐式表示为展开式

$$Z = Z^{(n)}(x, y) + Z^{(n+1)}(x, y) + \cdots,$$

其中 $Z^{(n)} \neq 0$, $n \geqslant 2$. 若把这式代入上面变换后的方程,容易看出,最低次的项是 $n-2$ 次的，而且这些项来自 $Z_{xx}^{(n)}$ 和 $Z_{yy}^{(n)}$. 由 $A_{11}(0,0) = A_{22}(0,0) = 1$,可知

$$\Delta Z^{(n)} = Z_{xx}^{(n)} + Z_{yy}^{(n)} = 0,$$

其中 Δ 是拉普拉斯 (Laplace) 算子. 但满足这个方程的唯一齐式是

$$Z^{(n)} = \mathrm{Im}\{c(x+iy)^n\}.$$

在例 3.7 里,我们已经看到,这些齐式 $Z^{(n)}$ 具有所需的性质. 但在经过 (0,0) 的每条 $Z^{(n)} \neq 0$ 的直线上，总有含 (0,0) 在内的一节,

在其中，Z 和 $Z^{(n)}$ 有相同符号. 故 Z 也有所需的性质.

4.6. 系理 若满足同一个绝对椭圆偏微分方程的两片曲面有正的半正常切触，则它们在切触处的一个邻域内重合.

4.7. 一个特款(不需用于我们的主要定理) 考虑具相同常数高斯曲率 c 的两片曲面. 它们满足偏微分方程

$$\varphi = rt - s^2 - c(1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

这时

$$\varphi_r\varphi_t - \frac{1}{4}\varphi_s^2 = t_r - s^2 = c(1 + p^2 + q^2)^2.$$

故若 $c > 0$，方程是椭圆型的.

现设 $c > 0$，则在应用 4.6 时，唯一可能出现麻烦的地方是，这个方程成为椭圆型的域的凸性问题. 我们实际需要的是对于 r, s, t 的凸性. 故我们所关心的是 (r, s, t) 空间里 $rt - s^2 > 0$ 的那部分. 在 E^3 里，方程 $rt - s^2 = 0$ 的轨迹是个锥面；因为经过坐标变换 $r = \xi + \eta$, $t = \xi - \eta$, $s = \zeta$，方程化为 $\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 0$. 若方程左边是正的，则 $\xi \neq 0$，故我们所考虑的是 $(\eta/\xi)^2 + (\zeta/\xi)^2 < 1$ 的域. 这是锥面的内部. 因此，所考虑的是两个凸域的并集.

在其中一个凸集里，$r > 0$, $t > 0$; 在另一个里，$r < 0$, $t < 0$. 故若 z_1 和 z_2 是 $K = c$ 的解，而 r_1 和 r_2 有相同符号，则 $z_1 - z_2$ 满足一个齐次线性偏微分方程.

因此，若具有相同正常数高斯曲率的两片曲面有切触，而且在切面的同一侧，则它们重合.

5. 主要定理

5.1. 引理 设 S 为具常数中曲率的 C^3 类简单闭曲面. 若把非例外方向的集合看作幺球面Σ的点集，则这集合有内点

证明 由于 $H = c$ 是解析方程，根据贝恩施泰因定理，S 是解析曲面. 由此可以证明，一切非例外方向所构成的集合是整个Σ，或者至多除去Σ上一条解析曲线.

1) S 上没有平点. 这是因为，若 p 是平点，则 $k_1(\text{p}) = k_2(\text{p})$

$= 0$,因而 $k_1(p) + k_2(p) = 2c = 0$,即 $c = 0$. 但这样,则 $k_2 = -k_1$,而 $K = -k_1^2$ 总是非正的,与第二章,4.2 矛盾.

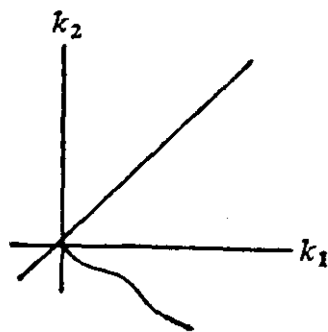
2) 抛物点集合是 $K = 0$ 所确定的解析曲线,在它上面每点总有恰好一个双重渐近方向. 显然这些方向对应于代表一切方向的球面Σ上一条解析曲线.

5.2. 定理 一个具常数中曲率的 C^3 类简单闭曲面是球面.

证明 若 d 是非例外方向,则根据定理 3.8,就有一个具如下性质的平面 P: 若 S' 是 S 对于 P 的反射象,则 S' 和 S 有正的半正常切触. 由于 $H = c$ 是绝对椭圆方程(见 4.2),S' 和 S 在切触点一个邻域内重合. 但若两个解析曲面在一个邻域内重合,它们就完全重合: $S' = S$. 故非例外方向对应于对称平面的方向. 因此,根据引理 5.1,对称平面方向的集合有非空内部. 于是根据引理 2.2,S 是球面.

6. 推广——简单闭魏因加尔吞曲面

6.1. 引理 设 S 为闭W曲面,其魏因加尔吞关系 $U(K, H) = 0$ 对应于一个偏微分方程 $\varphi = 0$,而对于 S,$\varphi = 0$ 是椭圆型的,这时,S 上没有平点.



证明 在第五章,2.4 中,我们看到,W曲面的微分方程为椭圆型的充要条件是$\frac{dk_2}{dk_1} < 0$. 现在,一个平点对应于曲率图的原点. 但若 $\frac{dk_2}{dk_1} < 0$,这样点的存在就表明整个曲率图在第四象限,而这又表明 $K = k_1k_2 \leqslant 0$,和第二章,4.2 矛盾.

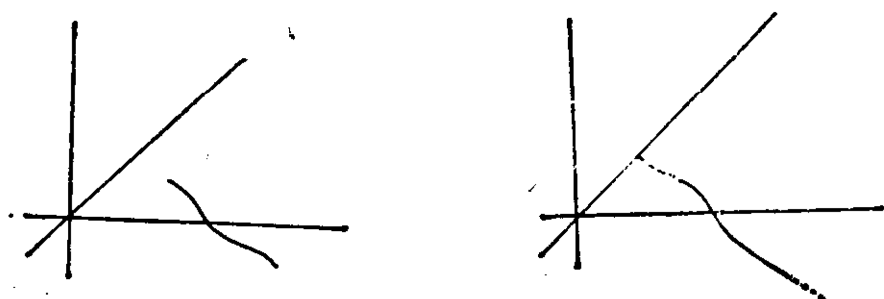
6.2. 定理 设 S 为 C^3 类简单闭W曲面,其W关系 $U(K, H) = 0$ 对应于一个解析绝对椭圆偏微分方程 $\varphi = 0$,则 S 是球面.

证明和第 5 节完全相同.

6.3. 可能的推广 定理 6.2 的证明既依赖于φ的解析性,又

依赖于 φ 的绝对椭圆性. 在定理 4.5 中, φ 的解析性的假设可以完全省掉. 实际上只须假定 φ 是 C^2 类的. 其中细节见 E. Hopf 的两篇文章, 一篇 1927 年发表在 Proceeding of the Academy in Berlin,一篇 1952 年发表在 Proceedings of the A. M. S.. 在 5.1 和 5.2 里,我们也用到了解析性,但看来这非常可能也是容易避免的.

6.4. 关于可能推广的附记 φ 也不需要是绝对椭圆的. 这是因为, 假定 φ 只对 S 是椭圆的, 则 S 满足另一个绝对椭圆的方程. 理由如下. 由于 φ 对 S 是椭圆的, S 的曲率图是一个单调减函数的曲线. 用一条 C^n 类曲线在两头延长: 一头延长到直线 $k_1 = k_2$,



在那里, $\dfrac{dk_2}{dk_1} = -1$;另一头延长到一切 >0 的 k_1 值; 并且使延长后所得曲线代表单调减函数.直线 $k_1 + k_2 =$ 常数和 $k_1 - k_2 =$ 常数确定一个新坐标系. 在这个坐标系里, 那条曲线的方程显然可以写成

$$k_1 + k_2 = f(k_1 - k_2),$$

或者

$$H = f(H^2 - K),$$

其中函数 f 对于它的变元的非负值都是确定的.

现在考虑魏因加尔吞关系

$$U^*(K, H) = H - f(H^2 - K) = 0.$$

它所对应的方程 $\varphi^* = 0$ 在 $k_1 = k_2$ 的下半闭平面里是绝对椭圆的,而且 S 显然满足它.

若把所有细节都作出来, 我们很可能获得以下事实的一个证明:阿列桑德洛夫定理 6.2 对于满足魏因加尔吞关系 $U(K,H)=0$, 其中 U 可微而且 $U_{k_1}U_{k_2} > 0$ 的一切 C^3 类简单闭曲面成立.

第　八　章

关于卵形面的全等定理

1. 等距曲面的第二基本齐式

1.1. 引言　设 S 和 S^* 是两个等距曲面(见第一章, 2.6). 设 h 为 S 和 S^* 之间的等距对应(或等距映射),而且在参数系 (u, v) 下, $\boldsymbol{X}(u, v)$ 和 $\boldsymbol{X}^*(u, v)$ 是映射 h 下的对应点. 这样, S 和 S^* 就有相同的第一基本齐式;即

1)
$$(E, F, G) = (E^*, F^*, G^*).$$

我们要证明, 若 S 和 S^* 是等距卵形面, 则 S 和 S^* 全等. 实际上, 我们将证明,若 h 是等距映射,则 h 是(正常或反常)欧氏运动. 由下面的定理 1.2 可知, 只须证明 S 和 S^* 有相同的第二基本齐式.

设 S 和 S^* 是等距曲面, 它们有共同的参数曲面 S_0 (对于卵形面,可以假定 S_0 是球面). 这样,就可以把

2)
$$\begin{cases} L du^2 + 2M dudv + N dv^2 = 0, \\ L^* du^2 + 2M^* dudv + N^* dv^2 = 0 \end{cases}$$

看作同一个曲面 S_0 上的齐式.

在 $K > 0$ 的款, 这两个齐式都是恒定的; 我们可以假定它们是恒正的,因为通过一个反射,恒负可以化为恒正. 于是我们要证明的是: 若 S 和 S^* 是等距曲面,则

3)
$$(L, M, N) = (L^*, M^*, N^*),$$

或者,与此等价,若

$$\lambda = L^* - L,\ \mu = M^* - M,\ \nu = N^* - N,$$

则在 S_0 上,

3′)
$$(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0).$$

由于 S 和 S^* 等距, $K = K^*$,故

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{L^*N^* - M^{*2}}{E^*G^* - F^{*2}}.$$

因而根据 1)，

4)
$$LN - M^2 = L^*N^* - M^{*2}.$$

1.2. 定理 设 S 和 S^* 为两个曲面，在它们之间有着 1—1 对应关系，而且在这个对应下，它们有相同的第一和第二基本齐式，则 S 和 S^* 全等。

证明 在第一章，9.1 中，我们曾经指出，这定理在局部是正确的；这就是，若 a 和 a* 是 S 和 S^* 上的对应点，则有邻域 A 和 A^*，它们经过一个欧氏运动 M_a 可以重合。我们要证明，若 b 和 b* 是任意另一对对应点，则 $M_b = M_a$。

现在，a 和 b 可以用一系列的有限多个具有上述性质的邻域衔接起来，故我们只须考虑有非空交集 C 的邻域 A 和 B。但在 C 上，M_a 和 M_b 都确定于同一个等距对应 h，因而它们在 C 上完全相同。由于 M_a 和 M_b 在曲面一个开集上一致，故 $M_a = M_b$。

1.3. 定理 设

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$
$$L^* du^2 + 2M^* du dv + N^* dv^2$$

是两个恒正二次齐式，而且 $LN - M^2 = L^*N^* - M^{*2}$。令 $\lambda = L^* - L$，$\mu = M^* - M$，$\nu = N^* - N$，则齐式

$$\lambda du^2 + 2\mu du dv + \nu dv^2$$

或者非恒定或者恒等于零；即 $\lambda\nu - \mu^2 \leqslant 0$，而且等号成立的充要条件是 $\lambda = \mu = \nu = 0$。

证明 经过一个坐标变换，等式 $LN - M^2 = L^*N^* - M^{*2}$ 仍然成立。由于两个齐式都是恒正的，可以把它们同时化为标准式，即可以假定 $M = M^* = 0$，因而 $\mu = 0$。这时 $LN = L^*N^*$，其中四个函数都是正的。现在，或者 $L^* = L$，或者 $L^* \neq L$。若 $L^* \neq L$，可以假定 $L^* > L$，因而 $N^* < N$。但这时 $\lambda > 0$，$\nu < 0$，即齐式是非恒定的。

注记 因此，要证明我们的主要定理，只须证明 $\lambda\nu - \mu^2 = 0$。

1.4. 定理 函数 λ, μ, ν 满足

$$-\lambda\nu + \mu^2 = N\lambda - 2M\mu + L\nu.$$

证明

$$\begin{vmatrix} L^* & M^* \\ M^* & N^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix},$$

其中 $L^* = L + \lambda$, $M^* = M + \mu$, $N^* = N + \nu$,故

$$\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{vmatrix} + (L\nu - 2M\mu + N\lambda) = \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix},$$

因而 $-\lambda\nu + \mu^2 = N\lambda - 2M\mu + L\nu$.

系理 若 $K > 0$,则存在着正定齐式 (L, M, N),满足

$$-\lambda\nu + \mu^2 = N\lambda - 2M\mu + L\nu.$$

1.5. 定义 用 $J(f, g, h)$ 表示连续函数环中,连续函数 f, g, h 生成的理想子环;即一切连续函数

$$af + bg + ch$$

的集合,其中 a, b, c 是连续函数.

我们考察一些 $= 0 \ (\mathrm{mod} J)$ 的函数.

1.6. 定理

$$\lambda_v - \mu_u = 0 \quad \mathrm{mod} J(\lambda, \mu, \nu),$$
$$\mu_v - \nu_u = 0 \quad \mathrm{mod} J(\lambda, \mu, \nu).$$

(满足这组方程的函数叫做伪科达齐函数.)

证明 对于 L, M, N,科达齐方程是

$$L_v - M_u = a_1L + a_2M + a_3N,$$
$$M_v - N_u = b_1L + b_2M + b_3N,$$

其中 a_i, b_i, $i = 1,2,3$ 都被第一基本齐式完全确定.故 L^*,M^*,N^* 满足相同的方程.把两组方程逐对相减,就得

$$\lambda_v - \mu_u = a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu,$$
$$\mu_v - \nu_u = b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu.$$

注记 只有在 λ, μ, ν 的公共零点,这个定理才是非平凡的.因为,假定 $\lambda \neq 0$,则

$$\lambda_v - \mu_u = a\lambda,$$
$$\mu_v - \nu_u = b\lambda,$$

其中

$$a = \frac{\lambda_v - \mu_u}{\lambda}, \quad b = \frac{\mu_v - \nu_u}{\lambda}.$$

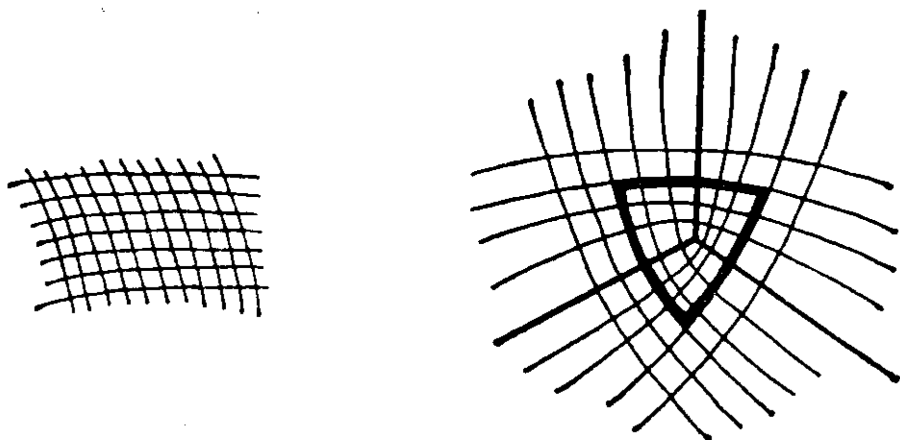
但这个定理显示，例如在 λ, μ, ν 的公共零点，

$$\lambda_v - \mu_u = 0,$$
$$\mu_v - \nu_u = 0.$$

2. 曲线网及其奇点

2.1. 一点讨论 设 $Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2$ 为满足 $AC - B^2 < 0$ 的二次齐式，则在局部，它确定两族曲线，而这两族构成网.

于是就有一个问题：假定在曲面的一个域内，在每一点的一个邻域里有这样一个局部网，这是否表明，在整个域里就有可以互相区别的两族曲线并构成一个网？附图[1]表明，这一般地不正确.图中曲线有这样的性质：若对粗三角形上一点，指定某个曲线族



所确定的线素，又沿三角形把这个线素延拓，则回到出发点时，就将得到属于另一族曲线的线素. 所以这组曲线不能分解为两族曲线. 我们将证实，在我们所考察的情形中，这种情况不会出现.

---

1) 三角形"中心"不属于所取的域. ——译者注

2.2. 定理 设 $Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2$ 是在一个球面上的二次齐式，其中或者 $AC - B^2 < 0$ 或者 $A = B = C = 0$。设G为一个不出现 $A = B = C = 0$ 的域,则方程

$$Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 = 0$$

在G内恰好确定两族曲线.

证明 由于所考察的是球面，而去掉球面一点(点∞)不影响我们的考察,在证明中,可以始终采用同一个坐标系. 用A乘上述方程,就可以把它写成

$$(Adu + Bdv)^2 + (AC - B^2)dv^2 = 0.$$

设 $-D^2 = AC - B^2$,其中 $D > 0$,则这方程可以分解为二:

I) $Adu + (B + D)dv = 0$, II) $Adu + (B - D)dv = 0$.

它们确定两族曲线,除非其中一个恒等于零. 例如若 $A = 0$, $B < 0$ 时,就得 $D = -B$,因而方程 I) 就变成恒等式.

另一方面,若当初用C乘原来方程,则分解后所得是等价方程

I′) $(B - D)du + Cdv = 0$, II′) $(B + D)du + Cdv = 0$.

所以我们得到两族完全确定的曲线,其方程为

I) $Adu + (B + D)dv = 0$, II) $Adu + (B - D)dv = 0$,

$(B - D)du + Cdv = 0$; $(B + D)du + Cdv = 0$.

练习 对于任意可定向曲面,证明上述定理成立.

2.3. 定理 采用定理 2.2 的记号[1],设 P 为

$$Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 = 0$$

的一个孤立奇点，j_1, j_2 依次为 P 对于曲线族 I, II 的指数，则 $j_1 = j_2 = j$,其中

$$j = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\delta_C[\arg(A - iB)].$$

证明 由于两族曲线在每点有不同的曲线，而且它们之间的角总不是 π 的整数倍,显然 $j_1 = j_2$. 令 $j = j_1$.

现考虑一族的曲线网

---

1) 以及假设. ——译者注

$$Adu^2 + 2Bdudv + [(1-t)C - tA]dv^2 = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

其判别式是

$$(1-t)AC - (1-t)B^2 - tA^2 - tB^2$$
$$= (1-t)(AC - B^2) - t(A^2 + B^2) < 0,$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

故根据定理 2.2，对于每个 t，有一个曲线网，它们都有同一个孤立奇点 p. 所以，对于每个 t，指数 t 是完全确定的，而由连续性，可知 $j = j_t, 0 \leqslant t \leqslant 1$. 令 $t = 1$，得曲线网

$$Adu^2 + 2Bdudv - Adv^2 = 0,$$

即

$$A(du^2 - dv^2) + 2Bdudv = 0.$$

选取其中一族曲线，并设 τ 为这族曲线和 u 线方向所作的角[1]，则

$$du:dv = \cos\tau : \sin\tau.$$

因而

$$A\cos 2\tau + B\sin 2\tau = 0.$$

现在，若 $A = B = 0$，则 $AC - B^2 = 0$，因而根据定理 2.2，$C = 0$，这不合假设. 故 $A - iB \neq 0$. 设 $\alpha = \arg(A - iB)$，则上面方程可以写成

$$\cos\alpha\cos 2\tau - \sin\alpha\sin 2\tau = 0,\ 或\ \cos(\alpha + 2\tau) = 0.$$

故 $\tau = -\dfrac{\alpha}{2} +$ 常数，因而 $\delta_C(\tau) = \dfrac{1}{2}\delta_C(\alpha)$. 于是

$$j = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\delta_C[\arg(A - iB)].$$

3. 主 要 定 理

3.1. 引言 我们将给出主要定理的两个证明. 第一个是 1927 年 Cohn-Vossen 所给出，后来为 Shitomirsky 简化了的. 在这个证明中，假定曲面是解析的，然后证明：若 (λ, μ, ν) 确定球面上满

---

1) 把 u, v 看作普通复数平面上的坐标，τ 是该平面上的角. ——译者注

足 1.3, 1.4, 1.6 的一个二次齐式，则该齐式恒等于零. 由于微分方程理论的新近发展，解析性的假设可以省掉.

第二个证明是 1943 年 Herglotz 给出的，它适用于 C^3 类曲面. 在这里，我们利用 1.3 的注所指出的事实，即只须证明 $\lambda\nu-\mu^2=0$. 我们将证明

$$\iint_{S_0}(\lambda\nu-\mu^2)P\,dA=0,$$

其中 P 是一个严格正函数. 由此，又由 $\lambda\nu-\mu^2\leqslant 0$，即得 $\lambda\nu-\mu^2=0$.

3.2. 引理 设 $\lambda du^2+2\mu du dv+\nu dv^2$ 为 1.1 所确定的齐式，并假定它满足定理 1.3, 1.4, 1.6 的结论，即:

1) $\lambda\nu-\mu^2\leqslant 0$，而若 $\lambda\nu-\mu^2=0$，则 $\lambda=\mu=\nu=0$;

2) 存在着恒正二次齐式 (L, M, N)，它满足

$$-\lambda\nu+\mu^2=N\lambda-2M\mu+L\nu;$$

3)
$$\lambda_v-\mu_u=0 \quad \mathrm{mod}\,J(\lambda,\mu,\nu),$$
$$\mu_v-\nu_u=0 \quad \mathrm{mod}\,J(\lambda,\mu,\nu).$$

设 P 为曲线

$$\lambda du^2+2\mu du dv+\nu dv^2=0$$

的奇点，若 λ, μ, ν 是解析而不恒等于零的，则 P 是孤立奇点，而且它的指数 i 是负的.

证明 通过参数变换，可以假定，在 P 点，

$$(L, M, N)=(1,0,1).$$

设在 P 邻近，λ, μ, ν 的泰勒展开式是

$$\lambda=\lambda^{(n)}+\cdots,$$
$$\mu=\mu^{(n)}+\cdots,$$
$$\nu=\nu^{(n)}+\cdots,$$

其中 $\lambda^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$ 中至少有一个不是零，而由于 P 是奇点，$n>0$. 根据条件 2)，

$$-\lambda\nu+\mu^2=N\lambda-2M\mu+L\nu.$$

左边的次至多是 $2n$，至于右边，由于在 P 点，$M=0$, $L=N=1$,

$M\mu$ 的第一项的次大于 n, $N\lambda$ 和 $L\nu$ 的第一项是 $\lambda^{(n)}$ 和 $\nu^{(n)}$,故

1) $$\lambda^{(n)} + \nu^{(n)} = 0.$$

现在,根据条件 3),

$$\lambda_v - \mu_u = a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu,$$

$$\mu_v - \nu_u = b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu.$$

右边没有 $n-1$ 次的项,故

2) $$\lambda_v^{(n)} - \mu_u^{(n)} = 0,$$

3) $$\mu_v^{(n)} - \nu_u^{(n)} = 0.$$

但由 1) 和 3),得

3′) $$\lambda_u^{(n)} + \mu_v^{(n)} = 0.$$

方程 2) 和 3′) 是关于 $\lambda^{(n)} - i\mu^{(n)}$ 的柯西-黎曼方程，故若令 $\omega = u + iv$,则

$$\lambda^{(n)} - i\mu^{(n)} = cw^n.$$

令 $\varphi = \lambda - i\mu$,则

$$\varphi = cw^n + \cdots.$$

于是根据第六章,3.4 的论点,

$$\delta_C(\arg\varphi) = \delta_C(\arg cw^n) = n2\pi.$$

因此,根据定理 2.3,

$$j = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\delta_C[\arg(\lambda - i\mu)] = -\frac{n}{2} < 0.$$

3.3. 定理 两个等距卵形面全等.

第一证明 设 $\lambda du^2 + 2\mu du dv + \nu dv^2$ 为 1.1 所确定的齐式,则它可以看作球面上的齐式,并满足引理 3.2 的性质 1),2),3). 故根据该引理和庞加莱定理,完全像第六章 3.3,3.4,2.3,2.4 那样,可得 $\lambda = \mu = \nu = 0$.

问题 在球面上有没有张量 $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0,0,0)$、它满足引理 3.2 的性质 1) 和 3) 而不满足性质 2)?

3.4. 定义 设 $q \in E^3$, 而 $p(x)$ 为由 q 到曲面 S 在 x 的切面距离. 假定 E^3 里的坐标系原点在 q. 若 $\boldsymbol{X}$ 为 S 的径矢, $\boldsymbol{N}$ 为内法矢,则 $p = |\boldsymbol{X}\boldsymbol{N}|$. 若 S 是卵形面而 q 在 S 内部,则

$$p = -XN$$

有严格正值，称为 S 相对于 q 的(支)撑函数.

3.5. 第二证明 可以假定 S 和 S^* 内部的交集是非空的. 设 q 为这个交集的一点，p 和 p^* 依次为 S 和 S^* 的撑函数. 现在，$EG - F^2 > 0$，而 $\frac{\lambda\nu - \mu^2}{EG - F^2}$ 是纯量函数. 我们将证明

1) $$\iint_{S_0} \frac{\lambda\nu - \mu^2}{EG - F^2}(p + p^*)dA = 0.$$

由于 $p + p^* > 0$，又我们知道或者 $\lambda\nu - \mu^2 < 0$ 或者 $\lambda = \mu = \nu = 0$，这就证明了定理.

但事实上，我们将证明，对于每一对等距闭曲面，即使它们不是卵形面，1) 式都成立. 理由如下.

$$\frac{\lambda\nu - \mu^2}{EG - F^2} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{vmatrix} L^* - L & M^* - M \\ M^* - M & N^* - N \end{vmatrix} = 2K - 2K',$$

其中 K 是 S 和 S^* 的共同高斯曲率，而

$$2K' = \frac{LN^* - 2MM^* + NL^*}{EG - F^2}.$$

故 1) 等价于

1′) $$\iint_{S_0} (K - K')(p + p^*)dA = 0.$$

现在，这里面的被积函数可以写成

$$(K - K')(p + p^*) = (Kp - H) + (Kp^* - H^*) - (K'p - H^*) - (K'p^* - H).$$

我们只须证明

2) $$\iint_{S_0} (K'p - H^*)dA = 0;$$

因为，若 2) 成立，则由对称，或令曲面 S 和 S^* 重合，就可以推知其余积分也是零. 公式 2) 和关于卵形面的 Minkowski 著名公式

3) $$\iint_{S_0} (Kp - H)dA = 0$$

很相似. 公式 3) 可以利用施托克斯 (Stokes) 公式推得; 因为可以证明,若 R 为一个曲面 S 上的域,其边界是 B,则

4) $$-2\iint_R (Kp-H)dA = \oint_B (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}, d\boldsymbol{N}).$$

由于 $\oint (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}, d\boldsymbol{N})$ 与坐标系无关, 故在一个闭曲面上取积分时,它就自相抵消,故由 (4) 即可推得 3).

在 4) 里, $N_i = -l_i^j \boldsymbol{X}_j$ (见第一章,8.2), 故 $d\boldsymbol{N} = -l_i^j \boldsymbol{X}_j du^i$. 公式 2) 可以由类似 4) 的关系

5) $$-2\iint_R (K'p-H^*)dA = \oint_B (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}, \Gamma)$$

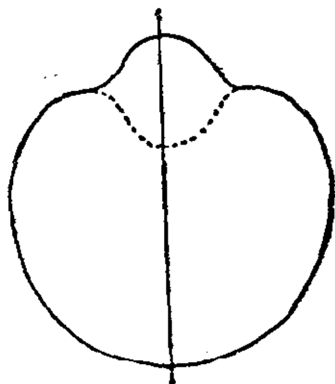
推得,其中 $\Gamma = -l_i^{*j}\boldsymbol{X}_j du^i$. 容易看出, $\oint_B (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}, \Gamma)$ 也和坐标系无关,因而 2) 成立.

练习 利用外微分法证明公式 4) 和 5),即证明

$$d(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}, d\boldsymbol{N}) = -2(Kp-H)dA,$$
$$d(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}, \Gamma) = -2(K'p-H^*)dA.$$

证明第一式是容易的, 因为 $dd\boldsymbol{N}=0$. 关于第二式, $d\Gamma=0$ 不成立, 但仍有 $d\Gamma\cdot\boldsymbol{X}_k=0$, $k=1,2$, 这有助于推得公式. 在 $d\Gamma\cdot\boldsymbol{X}_k$ 里,可以根据曲面间的等距性用 $\boldsymbol{X}^*$ 代替 $\boldsymbol{X}$. 因此, $d\Gamma\cdot\boldsymbol{X}_k = (dd\boldsymbol{N}^*)\cdot\boldsymbol{X}_k^* = 0$.

3.6. 推广 若不把曲面限于卵形面,定理肯定不成立. 附图表示两个 C^∞ 类回转曲面, 它们显然等距而不全等. E. Rembs (*Math.*



Zeitschrift, Vol. **56**(1952) p. 274) 举了些解析曲面的例，它们是等距的，但它们的等距对应却不是全等对应.

不过阿列桑德洛夫证明了(用俄文发表)，若 S 和 S^* 是简单解析闭曲面(亏格任意)，而且

$$\iint_{K>0} K dA = 4\pi,$$

则全等定理成立. 圆环面就属于这种情况.

我们的定理可以改述如下：已给一个具黎曼度量 g_{ij} 而 $K>0$ 的抽象闭曲面 S_0，则在 E^3 里至多有一个具这个度量的曲面(当然，对经过欧氏运动可以互相重合的曲面不加区别). 实事上可以证明，这样的曲面是唯一的. H. Weyl 1916 年给出了证明纲要，但未完成. 后来阿列桑德洛夫与 Pogorelov 给出了证明. Nirenberg 又给了另一个证明. 这些证明包含唯一性证明，因而也是我们定理的不同的证明.

第　九　章

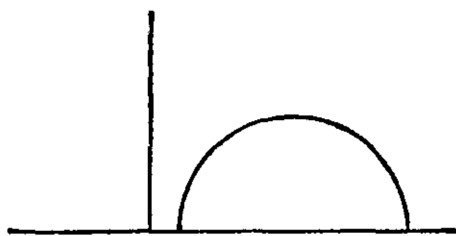
具负常数高斯曲率曲面的奇点

1. 奇　点

1.1. 引言　在本章里，我们将讨论(开)曲面及其在 E^3 里的嵌入. 开曲面的定义和第二章定义 1.1 相同，只是需要删掉其中条件 1) 里对 S 的紧性的规定. 我们将证明，一个具负常数高斯曲率的曲面不能作为无奇点(定义见下)的一般(开)曲面嵌入 E^3. 这结论的第一个证明是希尔伯特(～1900)对于解析曲面作出的. 我们的证明适用于 C^3 类曲面，而定理则对于 C^2 类曲面也成立. 但是 Kuiper 给出了双曲平面在 E^3 内的一个无奇点的 C^1 类等距嵌入. 细节见于 N. H. Kuiper, On C^1-isometric Imbeddings I, II; *Indagations Mathematicae*, Vol. 17 (1955), pp. 545—556, pp. 683—689.

1.2. 双曲平面　考虑 uv 平面的上半平面(即 $v>0$)，其度量是

$$ds^2=\frac{du^2+dv^2}{v^2}.$$



这样的曲面叫做双曲平面. 容易证明，这个曲面的短程线是垂直于 u 轴的半线和中心在 u 轴的半圆.

第一基本齐式可以写成

$$ds^2=\left(\frac{dv}{v}\right)^2+\frac{1}{v^2}du^2.$$

令 $\bar{v}=\log v$，则

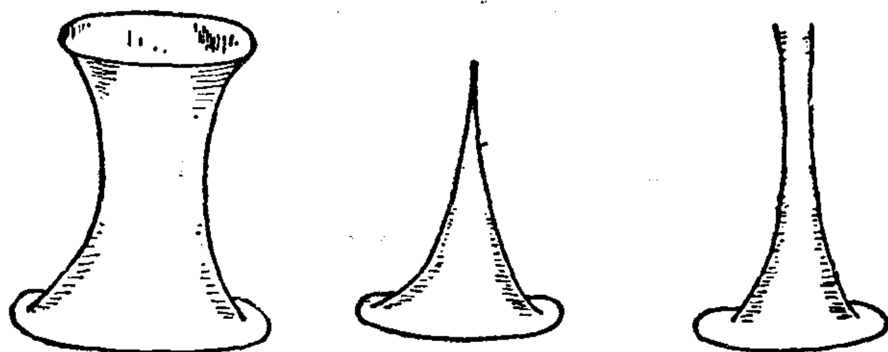
$$ds^2=d\bar{v}^2+e^{-2\bar{v}}du^2=d\bar{v}^2+g^2du^2,$$

其中 $g=\bar{e}^{-v}$ 故根据第一章，6.3，

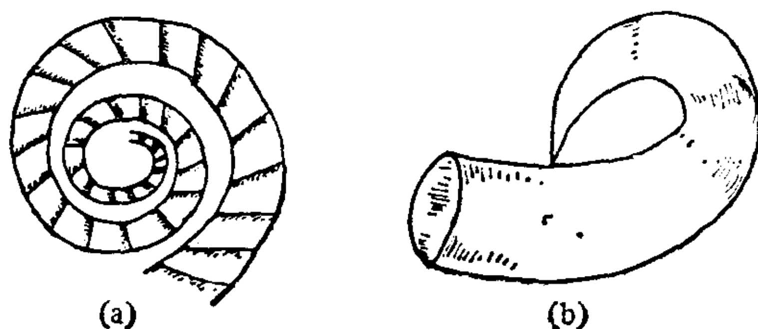
$$K=-\frac{g_{\bar{v}\bar{v}}}{g}=-1.$$

所以双曲平面是高斯曲率等于 -1 的曲面.

1.3. E^3 里的例 下面各图表示有奇点的具负常数高斯曲率的回转曲面. 在这些曲面的奇点曲线上,一个主曲率变得无限大,但法线却是连续的.



1.4. 讨论 一个主要的问题是对奇点下个满意的定义. 我们要讨论的是,一个抽象曲面 S_0 到 E^3 的嵌入中所产生的奇点. 因此,我们所考虑的不是抽象曲面上可能出现的"奇点"(例如度量的奇点之类).所以,我们将假定抽象曲面的点都是正则的.为了给奇点下定义,我们第一个尝试可能是规定:对于 E^3 里的一点 p, $p\notin S$ 而 $p\in\bar{S}$(S 的闭包),则 P 为 S 的奇点. 可是,只要求有一个收敛于 p 的序列 $(p_n: p_n\in S)$ 是不够的. 例如考虑一个类似螺形那样绕 P 点无限次的窄带 A 如图(a),则显然有一个序列 $p_n\in A$ 而收敛于 p,



(a) (b)

但我们不愿意把 P 看作 A 的奇点. 我们也可能要求,确实有一条有限长的曲线收敛于一个奇点. 但如图 (b) 所示,这也不是一个满意的定义;因为该奇点又和一个正则点重合.

下面的定义已证实是满意的.

1.5. 定义 若曲面 S_0 上每一条有限长的半开曲线(其参数 t 满足 $0 \leqslant t < 1$)有一个终点(在 $t = 1$)在 S_0 上，则 S_0(相对于一个黎曼几何)是完备的.

若 S_0 是完备的,则我们说, S_0 在 E^3 的嵌入无奇点.

奇点定义如下.

假定 $\boldsymbol{C}_0(t), 0 \leqslant t < 1$, 是 S_0 上一条有限长的发散曲线(我们通常总是采用嵌入E^3 时在 S_0 上的诱导度量);即 $t_n \to 1$ 时,$\boldsymbol{C}_0(t_n)$ 在 S_0 上没有极限点. 设 $\boldsymbol{C}(t)$ 是当 S_0 等距地嵌入 E^3 时, $\boldsymbol{C}_0$ 的象，则 $\boldsymbol{C}$ 是 E^3 里的有限长曲线,因而收敛于一点 $\mathrm{p} \in E^3$. 这时，我们说,S_0 在 E^3 里的象有一个奇点在 p. (象 1.4 的 (b) 那样, S_0 可能在 p 也有一个正则点.)

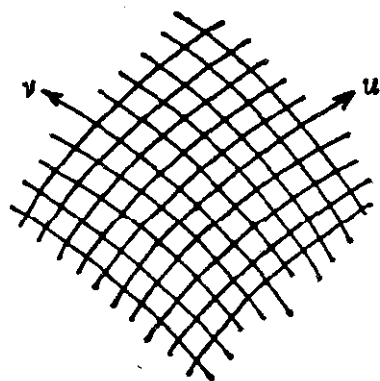
1.6. 进一步的讨论 我们定义的一个直接结论是,若 S_0 上每一条发散曲线都无限长，而 S_0 等距地嵌入 E^3, 则嵌入的曲面没有奇点. 容易看出,双曲平面上每条发散曲线都有无限长. 故若双曲平面可以等距嵌入 E^3,则嵌入的象将没有奇点. 但本章的主要定理告诉我们，一个具负常数高斯曲率的曲面的任意嵌入的象必有奇点. 所以双曲平面在 E^3 里没有等距嵌入.

我们的定义包括某些多少是平凡的奇点，而这种奇点对我们的讨论实际意义不大. 例如，假定 S_0' 是 S_0 的一个开的真子集,则 S_0' 相对于 S_0 有边界点. 显然,这些边界点在 S_0' 的等距嵌入中是奇点，而在 S_0 的嵌入中则不是. 这种可以通过原曲面的延拓加以消除的奇点叫做寻常奇点(或可去奇点). 我们将总假定这样的延拓已经完成,因为我们所需注意的是“实质”的,不能消除的奇点.利用 Zorn 引理可以证明,任意曲面都可以按这个意义延拓到不能再延拓的地步.

2. 切比雪夫网

2.1. 定义 设 R 为一片曲面，其上有不同的两族曲线所构成的网.我们可以沿这些曲线引进参数 u,v, 使得它们可以称为 u 线和 v 线. 选取 R 的一个正向,并令 ω 为由 u 线到 v 线的正角. 我

们总假定，在选取 u 线和 v 线时，使 $0<\omega<\pi$.



若以 u 线和 v 线为边的每个四边形对边长度相等，则曲线网称为**切比雪夫**（Tschebyscheff）**网**.

在切比雪夫网中，可以引进参数 u, v，使它们依次是 u 线和 v 线的弧长。在这样的坐标系里，第一基本齐式化为

$$ds^2 = du^2 + 2F dudv + dv^2,$$

其中 $F = \cos\omega$. 倒转来，在这样的第一基本齐式下，曲线 $u=$常数和 $v=$常数显然构成切比雪夫网. 这种坐标系叫做**切比雪夫坐标系**.

2.2. 引理 在切比雪夫坐标系下，高斯曲率 K 可以用

$$\omega_{uv} = -K\sin\omega$$

确定.

证明 在这样的坐标系下，

$$EG - F^2 = \sin^2\omega.$$

令 $W=\sqrt{EG-F^2}$，则根据奇妙定理，

$$K = \frac{1}{2W}\left[\left(\frac{F_u}{W}\right)_v + \left(\frac{F_v}{W}\right)_u\right] = -\frac{\omega_{uv}}{\sin\omega},$$

故 $\omega_{uv} = -K\sin\omega$.

2.3. 引理 若 R_0 为像 2.1 中所说的四边形，则

$$\left|\iint_{R_0} KdA\right| < 2\pi.$$

证明 设 R_0 的边是 v 线和 u 线，则因

$$dA = \sin\omega dudv,$$

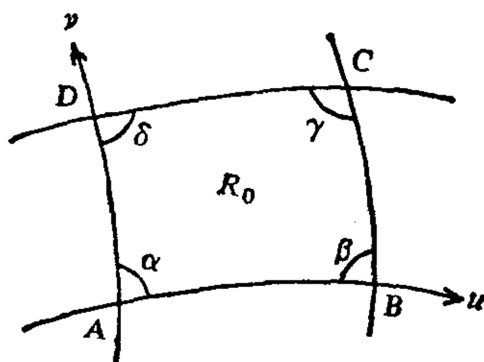
$KdA = -\omega_{uv}dudv$，故根据施托克斯定理，

$$\iint_{R_0} KdA = -\iint \omega_{uv}dudv = -\oint \omega_v dv,$$

其中线积分是沿 R_0 的边界正向取的. 于是，采用图中的记号，

$$\iint_{R_0} K dA = -\int_B^C \omega_v dv + \int_A^D \omega_v dv$$
$$= [-\gamma + (\pi - \beta)] + [(\pi - \delta) - \alpha]$$
$$= 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

由于 $0<\alpha, \beta, \gamma, \delta < \pi$,积分值介乎 -2π 和 2π 之间.



注记 上面引理只用到黎曼几何的概念而与曲面到 E^3 的嵌入性质无关. 但下面的定理则不然.

2.4. 定理 设 R 为 E^3 里一个曲面上的域,而在 R 上,$K=-1$,则 R 上的渐近曲线构成切比雪夫网.

证明 若 $K<0$,则渐近曲线是

1) $$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0$$

的解. 若以渐近曲线为 u 线和 v 线,则 $du=0$ 和 $dv=0$ 是 1) 的解;故 $L=N=0$. 在这样的坐标系里,科达奇方程化为

2) $$M_u = AM, \quad M_v = BM,$$

其中(例如参考 Blaschke (第三版) p. 117, 公式 139)

$$A = \frac{\frac{1}{2}(EG-F^2)_u + FE_v - EG_u}{EG-F^2},$$

$$B = \frac{\frac{1}{2}(EG-F^2)_v + FG_u - GE_v}{EG-F^2}.$$

方程 2) 可以写成

2′) $$(M^2)_u = 2AM^2, \quad (M^2)_v = 2BM^2.$$

但若 $K=-1$，则

$$\frac{-M^2}{EG-F^2}=-1,$$

或 $M^2=EG-F^2$. 代入 2′)，就得

$$(EG-F^2)_u=(EG-F^2)_u+2(FE_v-EG_u),$$

因而

$$EG_u-FE_v=0.$$

同样，

$$-FG_u-GE_v=0.$$

但 $EG-F^2\neq 0$，故这两式有解的充要条件是

$$E_v=0,\ G_u=0.$$

于是

$$E=E(u),\ G=G(v).$$

令 $\bar{u}$, $\bar{v}$ 为满足

$$d\bar{u}=\sqrt{E(u)}\,du,\ d\bar{v}=\sqrt{G(v)}\,dv$$

的坐标，则第一基本齐式化为

$$ds^2=d\bar{u}^2+2Fd\bar{u}d\bar{v}+d\bar{v}^2,$$

因而 $\bar{u}$ 线和 $\bar{v}$ 线构成切比雪夫网.

3. 主 要 定 理

3.1. 在本节里，我们将证明，E^3 里任意具负常数高斯曲率的曲面 S 必有奇点. 为此，我们必须证明，若 S_0 为 S 的参数曲面，则 S_0 是不完备的. 我们将证明，若把 S 上的标准切比雪夫网看作 S_0 上的网，则后者至少含有一条有限长的发散曲线，而由此即知 S 至少有一个奇点. 在第 4 节，我们将讨论（不加证明）确实存在哪些类型的奇点.

3.2. 定义 沿用上节的记号和假定，则对于 $K=-1$ 的曲面上一个域中的标准切比雪夫网，

$$\omega_{uv}=-K\sin\omega=\sin\omega>0.$$

这个方程显然与 u 线和 v 线的正向无关.

设 l 为网中一条 v 线，而 $p\in l$. 由于 $(\omega_u)_v>0$, ω_u 是 l 上的单调函数，故 l 上至多有一个 $\omega_u=0$ 的点. 因此，可以假设 $\omega_u(p)\neq 0$. 假定选取 u 的正向，使

$$\omega_u(p)>0.$$

若要求由 u 方向转到 v 方向的角 ω 是正的 $(0<\omega<\pi)$, 则 v 的正向也确定了. 这个 v 线方向叫做**特异方向**.

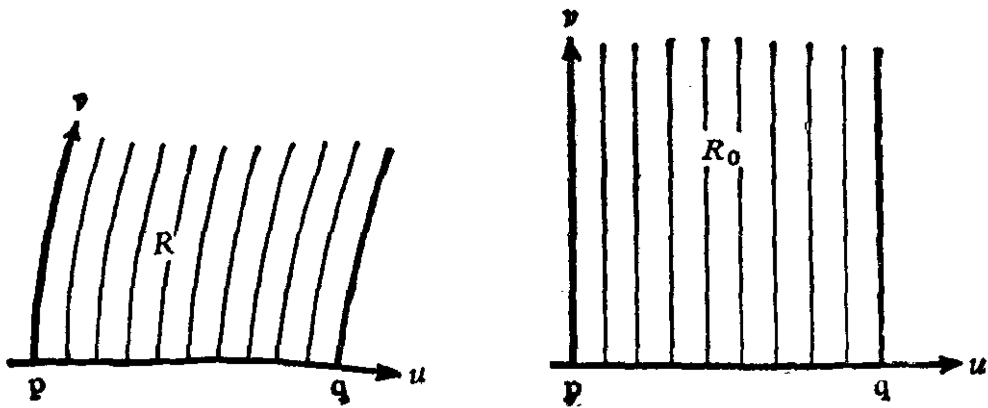
容易看出，这个方向与 R 的定向无关. 因为，若颠倒 R 的定向，而 $\bar{\omega}$ 是其相应的角，则 $\bar{\omega}=\pi-\omega$, 故

$$\bar{\omega}_u=-\omega_u,$$

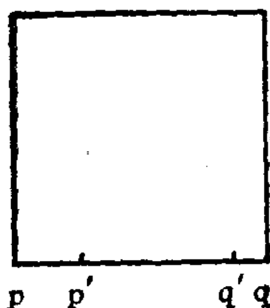
因此，在上面的讨论中，必须选取相反的 u 方向. 但这样(在 R 的这个定向下)，把 u 方向作正转动显然可以把它变到上述的 v 方向.

3.3. 定理 E^3 里具负常数高斯曲率的曲面必有奇点.

证明 设 S_0 为 S 的一个参数曲面，并把 S 上的标准切比雪夫网看作 S_0 上的网. 设 $p\in S_0$ 为 $\omega_u\neq 0$ 的点，并像 3.2 那样选定正 u 向和正 v 向. 设 q 为经过 p 的正 u 线上一点. 我们要考察的是，S 上位于经过 p, q 的 u 线上方(即正特异 v 方向的一侧)的域 R. 由于在这个域内有切比雪夫网，至少这个域的靠下部分对应于 uv 平面的一个长方形 R_0. 显然，对于一个充分小的 V, 可以从经过 p, q 的 u 线起，沿一条 v 线的特异方向量一个距离 V. 在 R 里的每一条 v 线上，这都是可以做到的. 为了证明我们的定理，只须证



明，沿 R 里的 v 线可以量的距离 V 有一个有限的最小上界 V^*. 这是因为，设 V^* 为这样的上界，则 R 里必有一条 v 线，沿着它不能量距离 V^*. 于是从 p，q 之间的 u 线出发的这条 v 线是具有限长的发散半开线，因而 S 有奇点.



我们证明 $V^* < \infty$ 如下. 设 U 为 p 和 q 之间 u 线的长，而 U' 满足

$$0 < U' < U.$$

在该 u 线上，选取 p' 和 q'，满足

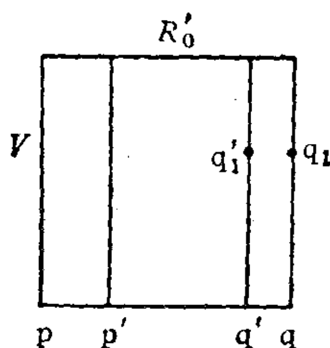
$$u(p) < u(p') < u(q') < u(q),$$

而且 $\overline{p'q'}$ 的长等于 U'. 由于 $\omega_u(p) > 0$，可以假定 q 充分靠近 p，使在整个 $\overline{pq}$ 上，$\omega_u > 0$. 这样，ω 在 $\overline{pq}$ 上就是增函数，因而

$$\omega(p') - \omega(p) > 0,\ \omega(q) - \omega(q') > 0.$$

于是可以选取 $\varepsilon > 0$，使它小于这两个值. $\left(\text{由于 } 0<\omega<\pi\text{，由此可知 } \varepsilon < \frac{\pi}{2}\text{[1]}\right)$.

现在，以 $\overline{pq}$ 为底，取一个其高为 V 的长方形. 在过 q 的纵边上，$\omega < \pi$. 此外，若 q_1 和 q_1' 的位置如图，则因 $(\omega_u)^v > 0$，我们有



$$\omega(q_1) - \omega(q_1') = \int_{q_1'}^{q_1} \omega_u du > \int_{q'}^{q} \omega_u du > \varepsilon^{2)}.$$

对于在 p 和 p' 上方的点，类似不等式成立. 所以，若 R_0' 是以 p'q'

1) 这话似不确；因为若 $\omega(p) = \frac{\pi}{10}$，$\omega(p') = \frac{2\pi}{10}$，$\omega(q') = \frac{3\pi}{10}$，$\omega(q) = \frac{9\pi}{10}$，则 $\omega(p') - \omega(p) = \frac{\pi}{10}$，$\omega(q) - \omega(q') = \frac{6\pi}{10}$，而 ε 就可能 $\geq \frac{\pi}{2}$. 应规定 $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$. ——译者注

2) 可以取 ω_{uv} 在长方形 $q'qq_1q_1'$ 上的积分. ——译者注

为底边的较小长方形，而 r 是其中任意点，则

$$\varepsilon < \omega(r) < \pi - \varepsilon,$$

因而

$$\sin\omega > \sin\varepsilon.$$

但

$$-KdA = \sin\omega du dv,$$

根据引理 2.3 和上面最后不等式，

$$2\pi > \iint_{R_0} \sin\omega du dv > \sin\varepsilon \iint_{R_0'} du dv = U'V\sin\varepsilon.$$

故

$$V < \frac{2\pi}{U'\sin\varepsilon},$$

因而 $V^* = \dfrac{2\pi}{U'\sin\varepsilon}$ 是一个上界．这就证明了定理．

4. 其他细节及推广

4.1. 奇点 M. H. Amsler 证明了，在一个具负常数高斯曲率的解析曲面上，存在着一条只含奇点的 C^∞ 类曲线．但他的证明对 C^n 类曲面不能用．细节见 Amsler, M. H., Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimonsions et de leurs singularités, *Mathematische Annalen*, **130**(1955) pp. 234—256.

4.2. 正常数曲率 可以证明，若 S_0 是抽象曲面，在其上确定了一个黎曼度量，而在这个度量下，S_0 是完备的而且 $K=1$，则 S_0 是紧的．由此即可看出，在 E^3 里，具正常数高斯曲率而没有奇点的曲面必是球面．

4.3. 严格正的或严格负的曲率 E. Heinz 证明了以下定理：设 E^3 里一个 C^2 类曲面用 $z=z(x,y)$, $x^2+y^2<R^2$ 确定，则

1) 若 $|H|\geqslant\alpha>0$，则 $R\leqslant\dfrac{1}{\alpha}$；

2) 若 $K\geqslant\alpha>0$，则 $R\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{\alpha}}$；

3) 若 $K \leqslant -\alpha < 0$，则 $R \leqslant e\sqrt{\frac{3}{\alpha}}$.

细节见 E. Heinz, Ueber Flächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind, *Mathematische Annalen*, **129**(1955) pp. 451—454.

还可以证明，在定理 4.2 中，若只要求 $K \geqslant K_0 > 0$，该定理仍然成立．由此可知，若 S 是 E^3 里这样的曲面而没有奇点，则 S 是卵形面．

若只要求 $K > 0$，可说的就不太多了．但 Stoker 证明了，阿达马定理(第三章，1.4) 仍部分成立，即：

若 S 是 E^3 里一个 $K > 0$ 的完备曲面，则 S 不和自己相交，而且是一个凸集的边界．

由此可见，球面映射是 1—1 的而且

$$\iint_S K dA \leqslant 2\pi.$$

4.4. 曲率积分(参阅第三章，2.3)　一般地，对于一个开曲面，$\iint_{S_0} K dA$ 不存在．但是，若 S_0 是"完备的"，则可以证明，存在着一个递增的区域序列 G_n，它们具有限面积，而且 $S_0 = \bigcup G_n$，

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{G_n} K dA = 2\pi(1 - p_1),$$

其中 p_1 是 S_0 的第一贝蒂数．对于一个闭曲面，我们已经有

$$\iint K dA = 2\pi(1 - p_1).$$

但对于任意曲面，$p_0 = 1$；而对于闭曲面，$p_2 = 1$，对于开曲面，$p_2 = 0$．所以，对于每一个完备曲面(闭的或开的)，总有

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{G_n} K dA \leqslant 2\pi(p_0 - p_1 + p_2).$$

细节见 S. Cohn-Vossen, *Compositio Mathematica*, **2**(1935).

人 名 索 引

Alexandrov, A.D. (阿列桑德洛夫) 128,149,163,173
Allendoerfer 118
Amsler, M. H. 1 83
Archimedes (阿基米德) 64,75
Berstein, S. (贝恩施泰因) 147,160
Betti (贝蒂) 117
Bieberbach 76
Blaschke, W. 80,179
Bonnet (崩尼) 29
Boy (博艾) 102
Bricard 67
Brouwer 99,116
Cauchy (柯西) 14,17
Chern, S. S. (陈省身) ii,118,128,133
Chevalley 121
Codazzi (科达齐) 96
Cohn-Vossen, S. 102,103,169,184
Connelly, R. iii
Darboux, G. 80
De Gua (德瓜) 19
Dehn, M. iii, 62
Dupin (杜潘) 93
Euclid (欧几里得) 2
Euler (欧拉) 2,23,114,117
Fourier (傅里叶) 51
Gauss (高斯) 29,62,90,91,118
Gerling 75
Hadamard (阿达马) 119
Hardy 53
Hartman 147
Hausdorf (豪斯多夫) 100
Heinz, E. 183,184
Herglotz (黑尔格洛茨) 40,170
Hilbert (希尔伯特) 60,102,103,128
Hopf, E. 163
Hopf, H. (霍普夫) 163
Hölder (赫耳德尔) 56
Hurwitz (胡尔维茨) 47,51
Jacobi (雅科比) 82
Jordan (若当) 14,60
Kagan 71
Klein (克莱因) 101
Kuiper, N. H. 175
Kuratowski 17
Laplace (拉普拉斯) 160
Legendre (勒让德尔) 2
Levi-Civita 86
Liebmann 128
Liouville (利奥维尔) 143
Littlewood 53
Minkowski 172
Nash, J. 104
Nirenberg 174
Pogorelov 174
Poincaré (庞加莱) 23,29,110,115
Rembs, E. 173
Riemann (黎曼) 9,89,90
Rado 137
Schmidt, E. (施米特) 47,56
Schur, A. (舒尔) 31
Schwarz, H. A. (施瓦尔茨) 33,57
Seifert 98
Shitomirsky 169
Steenrod 121
Steiner (施泰因内尔) 5
Stoker 184
Stokes (施托克斯) 173
Struik, D. J. 80
Sydler 73,75
Taylor (泰勒) 145
Trelfall 98
Tschebyscheff (切比雪夫) 177
Voss, K. 148
Weil 118
Weingarten (魏因加尔吞) 129,143,162
Wente, H iv
Weyl, H. 128,174
Winter 147
Wirtinger (维尔廷格尔) 51
Zorn 177

内 容 索 引

A

阿达马定理 119

B

保体变分 133
胞腔 2,22
贝蒂数 117
标准矩形(体) 60
博艾曲面 102

C

参数平面 81
撑函数 172
重分 7
抽象闭曲面 100

D

d线 150
单形 21
等周不等式 47—55,57—59
等距曲面 84
第一基本齐式 83,95
第二基本齐式 91,95
　　等距曲面的～ 164
逗留曲面 134
度(球面映射的) 115,116
杜潘标线 93
短程参数 86
短程线 84
短程坐标 86
对称平面 149

F

法曲率 94
法矢 82
方向图 149
复参数 139
复形 16

G

刚性 39
高斯-黎曼曲率(高斯曲率) 90,92,118
管形面 131

H

环柄 101—102

J

级(顶点的) 18
交叉点 19
简单闭曲面 98

K

可定向曲面 100
可容许参数变换 82
可微(曲面) 81,98,100
嵌入 16,102
开曲面 175
克莱因瓶 101
科达齐方程 96
亏格 8,99

L

例外方向 157
黎曼空间 89
黎曼几何 103
黎曼面 9

N

n维单形 21
内部(闭曲面的) 99

O

欧拉定理 2,3,5,8,14,114
欧拉-庞加莱恒等式 117
欧拉示性数
  n维凸多面形的～ 23
欧拉数 117

P

庞加莱定理 113
庞加莱数 117
平点 94
平行矢场 86,89
平移 86,89

Q

奇点
  矢场的～ 11
  曲面的～ 175
  曲线族(线素场)的～ 106
  曲线网的～ 167
  寻常～ 177
  ～曲线 176
奇妙定理(高斯) 91,96
脐点 93
腔(见胞腔)
切比雪夫网 177
切面 82
切矢 82
切触 153
球面映射(象)
  曲线的～ 30,36
  曲面的～ 115
曲率(曲线的) 30
曲率图 128
曲率线 93
曲线网 167

R

r维腔 22

S

射影平面 100
四顶定理 35
示性数 8,24
双重渐近方向 151
双曲平面 175

T

特异方向 181
凸多面形 2
凸胞腔 2
凸集 119
凸体 119
椭圆方程 157
  绝对～ 158

W

外部(闭曲面的) 99
完备曲面 177
网络 2
魏因加尔吞(W)曲面 129
  特殊～ 143
  简单闭～ 162

X

线素(场) 106
相抵多边形(多面体) 62

Y

一般闭曲面 102
隅 37
  极～ 75

运动

Z

正则场 106
正则重分 *66*
正方参数 138
指数
  孤立脐点的～ 140
  孤立奇点的～ 106
  隅偶的～ 39
主方向 93
主曲率 93
自由顶点 15
总曲率
  曲面的～ 90,113
  曲线的～ 42